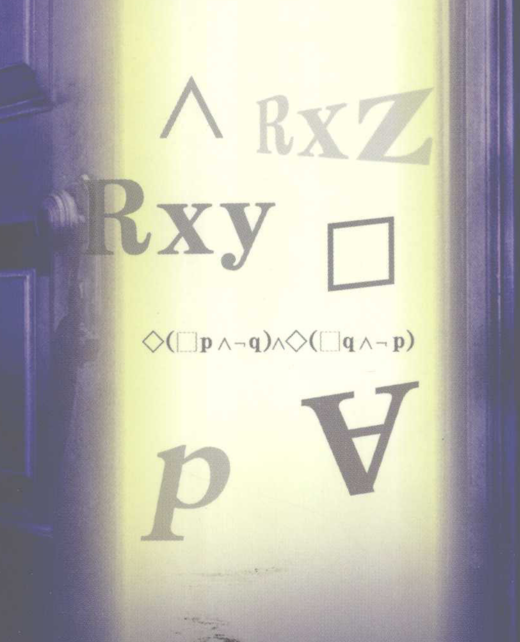


卷Ⅲ

逻辑之门——约翰·范本特姆经典著作

模态对应理论

〔荷〕约翰·范本特姆 著
张清宇 刘新文 译
刘奋荣 校



科学出版社
www.sciencep.com

在迄今为止我所读到的模态逻辑著作中，该书包含的数学最为复杂。而且，该书的语言表达清晰明朗，是读者可以期待范本特姆做到的。这是一本理想的著作，可以让当代的数学家们认识到模态逻辑不仅重要而且也十分有意思。

——R．A．布珥：关于《模态逻辑和经典逻辑》的书评，
《符号逻辑杂志》，1987，52（2）

模态逻辑让我们意识到逻辑在表达力方面的微细结构。

——范本特姆：《思想开放者的模态逻辑》，斯坦福语言和信息研究中心，
2010年出版

(B–0188.0101)



定　价：56.00 元

卷III

逻辑之门——约翰·范本特姆经典著作

模态对应理论

〔荷〕约翰·范本特姆 著

张清宇　刘新文 译

刘奋荣 校



图书在版编目（CIP）数据

模态对应理论/〔荷〕约翰·范本特姆著；张清宇，刘新文译；刘奋荣校．—北京：科学出版社，2010.7
（逻辑之门：约翰·范本特姆经典著作；Ⅲ）
ISBN 978-7-03-027865-4

Ⅰ．模…　Ⅱ．①范…②张…③刘…　Ⅲ．①模态逻辑-文集　Ⅳ．①B815.1-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 104984 号

责任编辑：胡升华　郭勇斌／责任校对：张　琪
责任印制：赵德静／封面设计：无极书装
编辑部电话：010-64035853
E-mail：houjunlin@mail.sciencep.com

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2010 年 7 月第　一　版　　开本：B5（720×1000）
2010 年 7 月第一次印刷　　印张：16 1/2
印数：1—2 500　　字数：333 000

定价：56.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

逻辑之门——约翰·范本特姆经典著作

顾　问　约翰·范本特姆

主　编　刘奋荣

丛 书 序

逻辑学是一门古老的学科，它的历史可以追溯到古希腊、印度和中国。逻辑学发展到今天，已成为一门基础学科，越来越具有交叉性。许多学科，从数学到人文学科、从计算机科学到社会科学，在这里交汇。所以，进入逻辑的世界将会使我们掌握整个学术研究领域的基础、工具和方法。

约翰·范本特姆是当今著名的逻辑学家。他从20世纪70年代开始就活跃在逻辑研究的很多领域，是发展这种现代逻辑观的领军人物。他的学术研究不仅涉及纯粹的数学基础领域，而且还涉及许多其他的应用领域。约翰·范本特姆是著名的阿姆斯特丹大学的逻辑、语言和计算研究所的创始人。他是欧洲逻辑、语言和信息学会的第一任主席。同时，他还是斯坦福大学的哲学教授，是中山大学的客座教授。“逻辑之门”这套丛书的宗旨是让中国的读者更系统地了解他的学术研究及他对逻辑未来发展趋势的一些看法。丛书包括约翰·范本特姆的经典论文和专著的译文。这些著作涉及的主题有：关于信息、进程和智能互动的模态逻辑；自然语言中范畴语法和量词语义的逻辑；逻辑与认识论和科学方法论之间的相互影响。

总之，本丛书将会呈现给读者一个崭新而活跃的研究领域，在这里逻辑、哲学、数学、计算机、语言学、社会科学和认知科学之间互相交叉和渗透。本丛书的译者都是活跃在中国逻辑界从事现代逻辑教学和研究的学者，他们的工作将会为读者开启一扇进入广阔的逻辑世界的学术之门，也将会对进一步开展国际学术交流、全面实现中国的逻辑研究现代化、实现中国的逻辑研究同国际逻辑研究水平的全面接轨起着巨大的促进作用。遵诸位忘年友之嘱，是为译序。

张家龙

2007年7月24日

作 者 序

模态逻辑产生于20世纪初期。当时，模态逻辑是用来分析哲学概念的一个工具，譬如，对必然和可能的概念以及具有类似结构的其他概念进行分析。照此，模态逻辑似乎是外延经典逻辑的一种附加物，在某种意义上说，甚至是对经典逻辑的一种背离。然而，1960年左右可能世界语义学产生时，最突出的一个成就是发现了模态公理和可能世界可及关系的经典条件之间的密切关系。例如，模态逻辑S4对于自返传递模型是完全的。紧接着许多类似的结果出现。但是，直到1970年左右大家才找到这种联系更为一般的原因。本书就是从语义的角度对这些原因进行探讨。本书既包括此项研究在20世纪70年代的状态，也包括近年来的一些后继工作。

模态逻辑和经典逻辑的一个重要联系是模态公式到一阶公式的所谓“标准翻译”，这样得到的一阶公式在可能世界关系模型上等值于模态公式。因此，我们可以把基本的模态语言看做是一阶语言的一个可判定的片段，这个片段是经典逻辑典型的可用部分。事实上，这个部分可以通过非常具体的语义方式来刻画，即在模型之间它是对互模拟不变的。这就形成了对模态语言（包括基本模态语言的扩展）的一般看法：模态语言是一阶语言的一个精心选择的片段，它既有一定的表达力又有很好的计算属性。实际上，这就得到了经典逻辑的一个“微细结构”，它们以一族模态形式系统出现，这些系统本身的性质和相互之间的关系仍然是当今研究的热门领域。

不过，还可以从另外一个视角看问题：不管如何解释公理中的原子命题，我们都可以把模态公理看做是在表述纯粹可及关系之间的性质。如果这样思考问题，模态语言就变成了二阶语言的一个片段。我们知道，二阶语言是对命题（被看做是世界的集合）进行量化。这就是本书“对应理论”的切入点。书中探讨了由模态公理表达的关系属性的结构，首先从一些有趣的现象入手，即具有哲学传统的许多模态逻辑可以证明是在定义可及关系简单的一阶属性，有各种各样的定理来对此做出解释。此外，更复杂的情形也得到了研究。例如，可证性逻辑中的洛伯公理，它定义的性质不是一阶的，因此更复杂。最后，我们还利用一些在研究模态技巧时获得的经验来探讨二阶逻辑。

作 者 序

本书技术性很强，对许多问题的研究成果最终都体现为一些数学定义、定理和新方法。在本书的第二部分，我们还增加了几篇新近的技术性论文，用最新的例子说明这样的研究和观点在今天仍然很活跃。

也许可以说，本书的关键是要发展模态逻辑和经典逻辑并行的观点。我们找到了两者之间的联系，对此进行了系统的研究，得到各种各样的结果。从数学的观点看，好的思想可以在两个方向流动。一方面，我们用经典模型论和代数的技巧证明模态逻辑中的一些结果；另一方面，我们也用模态的技巧证明经典逻辑的新结果。从哲学的观点看，那种反对“非经典”的模态逻辑、寻求经典逻辑和非经典逻辑之间严格分界线的做法变得毫无意义。事实上，模态逻辑和经典逻辑之间的关系相当和谐，在很多方面它们都是相互关联的。确切地说，模态词像量词，而量词也像模态词。

这本专著的很多材料一直以来都不太容易获得。因此，我非常感谢张清宇研究员主动提出要翻译此书，也非常感谢他和刘新文博士为翻译付出的辛劳。同时，我也感谢“逻辑之门”系列丛书的主编刘奋荣为本书的出版所做的努力。

约翰·范本特姆

2009 年 5 月

译 者 序

约翰·范本特姆教授是当今最著名的逻辑学家之一，学术研究涉及模态逻辑、语言逻辑、博弈逻辑及逻辑哲学等领域。从20世纪70年代到现在，他出版了6部专著和约450篇学术论文，主编了4部具有权威性的逻辑手册，其影响从学术界对他著作的引用程度可见一斑。本书得到了阿姆斯特丹大学的支持，旨在将范本特姆教授的著作翻译成中文，使其在中国内地、香港和台湾等华语地区得以更为广泛的传播。

本书作为四卷本翻译项目中的第三卷，共分上、下两篇，上篇是作者在其1976年的博士学位论文基础上出版的《模态逻辑和经典逻辑》一书，是本翻译项目中唯一一部专著，下篇是作者2005年以来发表在《符号逻辑杂志》等刊物上的三篇论文，主要内容都是范本特姆教授20世纪70年代以来对逻辑学研究最著名的贡献——“模态对应理论”。对应理论、完全性理论以及对偶理论并称为模态逻辑研究中的三大支柱理论。70年代，范本特姆教授研究了模态语言的数学模型论和它们跟一阶及二阶逻辑的联系，创造了一个系统的、论述框架类的模态对应理论，主要结果包括初等模态公式的刻画、典范可定义模态框架类的刻画以及模态可定义性结果向二阶逻辑的推广。这一研究还引出模型之间的互模拟（bisimulation）概念，也因有断定模态语言应刻画为由那些对互模拟不变的一阶公式所组成的定理而更为突出。这工作在方法论上的主要冲击就在于“并行观点（tandem view）”的重要性，模态观点和经典观点同时用于理论和实践。关于这一领域的最新综述，请参阅范本特姆教授为影响巨大的多卷本《哲学逻辑手册》撰写的章节“对应理论”；这一综述已经在本丛书第一卷《逻辑、信息和互动》作为第一章出版了，译者为刘奋荣和余俊伟。同时，范本特姆教授专门为本书撰写了“作者序”，并为上、下两篇分别撰写了新的引论，详细介绍了这一主题的历史背景和研究动机，对于读者把握本书的精髓并对模态对应理论进行深入研究都将起到极其重要的作用。

本书后面有两个附录，其中的“附录一：约翰·范本特姆小传”为我们从整体上快速了解范本特姆教授对逻辑学的贡献提供了一个捷径。

本书在翻译过程中得到过许多人的帮助。中国政法大学逻辑研究所的硕士生

谢唯彬、张娟在整理和录入方面提供了大量的帮助，书中的很多图形和公式是在清华大学哲学系博士生马明辉的帮助下处理完成的，浙江大学人文学院博士后裘江杰详细阅读了本书初稿，并对译文提出了大量有益的意见和建议，简直可以作为本书校对者之一列于封面。当然，我们还是希望广大读者朋友对于我们的翻译工作提出任何形式的批评、意见和建议，以促进我们今后工作的提高。根据以往的经验，为了便于读者查阅，我们把上篇书中的索引以及下篇论文中出现的术语、人名翻译之后，另外做了一个术语和人名的“汉英对照”作为附录二的次级附录。

在翻译的过程中，刘奋荣做了大量的准备，并承担了本书的最后校对工作，我们就遇到的问题和作者之间进行了大量的电子邮件联系，还在作者对北京的多次学术访问期间作了当面交流，对于本书的效率和质量起了重要作用。本书完稿时正值范本特姆教授访问北京，我们于 2008 年 10 月在清华大学举办了一个小型的研讨会，译者和作者进行了富有成效的交流。该会议得到了中国逻辑学会的大力支持。

我们对以上提到的所有人员和单位表示衷心的感谢！同时感谢阿姆斯特丹大学对本项目的资助，感谢科学出版社科学人文出版中心胡升华主任和郭勇斌编辑为本书的出版所付出的艰辛劳动！

中国社会科学院哲学所逻辑室
张清宇　刘新文
2009 年 5 月

前　言*

本书是我的博士论文“模态对应理论”[5]和补充报告“作为二阶逻辑的模态逻辑”[7]的一个改述。我想要重复我在前者中所作的谢辞。

我的“导师”洛伯和“校外审查员”托马森以他们建设性的批评给予了我无价的帮助。我也非常感谢艾克霍恩－皮格女士，感谢她用打字机打出了我的博士论文和补充报告。实际上，阿姆斯特丹大学逻辑和数学基础教研室（Vakgroep Logika en Grondslagen van de Wiskunde）的全体工作人员一直是我所获得的鼓励、忠告和经常性积极帮助的一个永不枯竭的源泉。这里我特别提到布洛克、杜茨、德漾（在博士论文撰写的关键阶段他非常慷慨地给予了我帮助）以及特鲁斯特拉。至于活跃在模态逻辑领域的人们，我从法因、戈德布拉特、萨奎斯特、塞格伯格和托马森等人的论著中学到了许多东西。

我还应当感谢在克拉科（Krakow）的 Jagiellonian 大学的佩扎诺夫斯基，没有他的耐心劳作这本书就不会存在。由于事情的发展超越了他和我的控制，从 1978 年本书的完成到正式出版经历了一段漫长曲折的路程，由荷兰经波兰直到意大利。正是冈特纳主持了这一游程的最后阶段，终至成书出版。

不过，最应该感谢的是我的父母，谨以此书献给他们：

布雷姆·范本特姆

安妮·埃杰蒙特

---

* 本前言原为《模态逻辑和经典逻辑》的前言

目　录

上篇　模态逻辑和经典逻辑

第一部分　模态命题逻辑的简要概述

第二部分　模态公式的一阶可定义性

第三部分　模态可定义性

第四部分　高阶可定义性

下篇　模态对应理论新进展

附　录

上篇

模态逻辑和经典逻辑



本书的主体内容是我1977年的博士论文“模态对应理论”。论文的指导老师是洛伯教授（M. H. Löb）。论文的完成也得到了其他几个同事的帮助，我想在这里提到的有：布洛克（W. J. Blok）、德漾（D. H. J. de Jongh）、托马森（S. K. Thomason）以及特鲁斯特拉（A. S. Troelstra）。后来，我的研究得益于跟许多模态逻辑学家的交往，譬如法因（K. Fine）、格拜（D. Gabbay）、戈德布拉特（R. I. Goldblatt）、塞格伯格（K. Segerberg），还有很多其他人。当时，在完成了博士论文之后，我还有不少进一步的想法，于是写了一些后继报告和一系列的论文，发表在《符合逻辑杂志》（*Journal of Symbolic Logic*）、《逻辑研究》（*Studia Logica*）和《理论》（*Theoria*）上，从而形成了本书的主要材料。

以上研究的结果就得到了对应理论，这对于20世纪70年代模态逻辑的“数学转向”是很典型的，这使得模态逻辑的发展远远超越了它的哲学的历史根源。特别是，模态逻辑与一阶逻辑和二阶逻辑之间的联系也得到了深入的探讨。许多结果现在已经成为模态逻辑的标准主题，例如，萨奎斯特（H. Sahlqvist）对应定理，戈德布拉特－托马森定理，还有很多我自己用来分析与模态公理对应的关系属性的结果和方法。我们可以从两个方向看待对应理论：一方面，给定的模态公理表达的是什么；另一方面，哪些经典性质能够用模态公式表示？而且，对应理论使用了各种各样的技巧，从模型论到泛代数，此外，我们也讨论了演绎系统、完全性定理和不完全性现象等。

这部专著的一个简要概述是1984年出版的《哲学逻辑手册》中的“对应理论”的那一章。那一章的最新版本已经被译成中文，包括在“逻辑之门”第一卷中。新版本叙述了本书的研究之后出现的一些发展。这里我想提及一些：1993年的论文“再次讨论模态框架类”（*Fundamenta Informaticae*，18：2/3/4，307～317），这篇论文给出了戈德布拉特－托马森定理的纯模型论的证明，也进一步分析了代数方法和模型论方法的关系。还有，腾卡特（B. ten Cate）的博士论文“扩展模态语言的模型论”（*Institute for Logic*, *Language and Computation*, University of Amsterdam, 2005），他解决了本书提到的几个开放的问题，特别是关于在带命题量词的语言中如何刻画模态可定义性的问题。最后，由布珥（R. A. Bull）撰写的关于本书的一个书评，发表在《符号逻辑杂志》［1987，52（2）：557～558］，也值得一读。

最后，我想谈谈关于本书出版的故事。这本书的手稿一完成，我的朋友佩扎诺夫斯基（J. Perzanowski）就建议在华沙的Ossolineum出版社出版，我甚至事先得到一笔稿酬，于1980年在波兰开了一个银行账户。读者可以想象，这对于一个西方逻辑学者而言，可算得上是一件惊险的事情……不幸的是，波兰的出版未

能成功。最终，在冈特纳（F. Guenthner）的提议下，这本书于 1983 年在那不勒斯的 Bibliopolis 出版社出版。本书的出版得到了该出版社老板兼创建人佛朗哥（Francesco del Franco）的支持，他相信出版的文化价值，也相信要在长时间的晚宴与意大利美酒中讨论关于出版的事情。我感谢在我学术生涯的形成阶段所有这些人给予的热情支持和鼓励。

引　言

关于此书内容的研究始于 1972 年。这一研究受启发于克拉贝（E. C. W. Krabbe）[42]中所作的一个说明和塞格伯格在论文[69]中所作的一个讨论。后一论文专注于证明模态逻辑的完全性定理，下述结果是其一个简单的例子。一个模态逻辑为由$Lp \rightarrow LLp$ 公理化的正规模态逻辑（这里“L”表示“必然”），当且仅当它在所有其择代关系具有传递性的框架上成立（称一个模态公式为在一个克里普克（S. A. Kripke）框架上成立，是指它在该框架上的每一个赋值下都为真）。接着克拉贝观察到，在任意一个克里普克框架上，$Lp \rightarrow LLp$ 成立，当且仅当该框架的择代关系具有传递性。换句话说，他给出了模态公式 $Lp \rightarrow LLp$ 和定义传递性的一阶语句$\forall x \forall y$（$Rxy \rightarrow \forall z$（$Ryz \rightarrow Rxz$））之间的一个直接的对应。

由于算子 L 在克里普克语义中的作为就像一个受限的全称量词（对于在其中进行计值的世界的所有 R-后继），故而在上述两个公式之间有一种语形上的相似性，二者都包含有两个这类量词的一个嵌套序列。这个简单的观察开启了一种研究，即把那些表达一阶关系性质的模态公式翻译成描述这些性质的一阶公式的语形转换过程。菲奇（F. B. Fitch）的论文[26]为形如 $M_1 \cdots M_k p \rightarrow M_{k+1} \cdots M_{k+l} p$［这里 $k \geqslant 0$，$l \geqslant 0$，“M”表示“可能”，“M_k”表示“$M \cdots$（k 次）$\cdots M$”，并且 $M_i = L$ 或者 M（$1 \leqslant i \leqslant k+l$）］的模态公式构造这样的等价式，可作为此项研究的一个进一步的激励。可惜，在 1973 年，有结果表明以此方式得到的结果已经由萨奎斯特给出[66]。不过，得到它们的方法仍具有某种独立的趣味，因而将在第 9 章中阐述。

当系统表述定义一阶性质的模态公式的语形标准时（上述研究的一个必要条件），重要的是要有一种方法来说明某些模态公式并不定义这类性质。依据于骆文汉姆－斯科伦定理的一个应用，这样的方法被发现并发表在［1］中，此结果表明我们所熟知的公式 $LMp \rightarrow MLp$ 并不定义择代关系的一阶性质。报告［10］概述了那一阶段（1974 年春）得到的结果以及在时态逻辑方面的一些应用。同年夏天，上述两种方法的一个组合应用产生了关于哪些模态归约原理定义一阶性质的问题的一个完全语形的回答。模态归约原理（这一名称归于菲奇）就是形如 $M_1 \cdots M_k p \rightarrow M_{k+1} \cdots M_{k+l} p$［这里 $k \geqslant 0$，$l \geqslant 0$，并且 $M_i = L$ 或者 M（$1 \leqslant i \leqslant k+l$）］

的模态公式。注意，许多熟知的模态公理都具这种形式，例如，$Lp\to p$，$Lp\to LLp$，$MLp\to p$，等等。这个结果发表于［8］中。

一篇未发表的论文[2]研究了文学解释的模型论处理①，托马森发现了其中的一个错误，这就导致了定义一阶性质的模态公式的一个语义刻画，它们被刻画为对超幂保持的公式。文献［6］利用戈德布拉特的一个引理（参看第8章），以一种简化的形式叙述了这一事实最初所用到的证明。

1975年，我决定用［1］、［6］、［8］三篇论文作为博士学位论文的基础，论述模态公式和一阶关系性质之间的联系；这三篇论文都发表在《符号逻辑杂志》上。伴随它们一起的有关于这一研究主题的一个综述，后来发展成一本书[5]，其中包含若干新问题，例如，第15章中的保持性结果。本书自始至终都把模态公式当做一种特殊的二阶公式来考虑。这一观点受到来自（［77］中）托马森的证明的推动，托马森证明了二阶语义后承概念可以归约到模态逻辑的语义后承概念（至于更多的细节，参看第1章）。尤其要强调的是，随后的报告［7］包含有不再能加入到［5］中的“附录和补遗”。事实上，［7］的大部分内容都只论述二阶逻辑（参看本书的第四部分）。

迄今为止说到的大部分结果都是利用模型论方法得到的。代数方法［尽管布珥[16]和麦金森（D. C. Makinson）[55]用得如此有力］似乎不那么有前途，但是戈德布拉特[31]和布洛克[14]的论文表明，代数方法在可定义性方面也许是相当有用的（例如，可以找到等式簇的柏克霍夫刻画）。戈德布拉特的技术可在第16章中看到（这一技术的一个特别的应用——所谓的典范模态逻辑的一个刻画——已作为［3］出现）。当然，模型论方法和代数方法之间的差别是表面而非实质的，因为（泛）代数终究可以看成模型论中不考虑谓词的那一部分。

可以说，这一研究是关于*可定义性理论*的。模态语言是被作为定义择代关系的性质的一种手段来研究的，与其他语言的比较也是为同样的目的服务的。例如，下述问题都将在后面得到研究。

（1）一个给定的公式何时定义（择代关系的）一个一阶性质？

（2）一个给定的一阶性质何时能由一个模态公式（或者一组这样的公式）来定义？

（3）什么样的框架类完全可以用模态公式来定义？

对于所有这三个问题，已经有了模型论的回答（分别参看第8、14和16章）。大家曾经希望可能得到关于（1）和（2）的纯语形答案。但是，第7章和第9章

① 这篇论文是有关文学作品（如故事、小说等）的解释——译者注。

中的若干结果使得下述结论似乎是有道理的：（至少）定义一阶关系性质的模态公式类甚至都不是算术可定义的。

可是，至今为止模态逻辑中研究的主题一直都是*完全性理论*，而不是可定义性理论。论述这一主题的经典参考文献是［67］。在本书中，这一主题只在第6章中为了讨论它跟可定义性理论的联系时论及。这一联系涉及的问题太多，许多问题尚有待解决。完全性理论最近受到了新的刺激，这一新的刺激来自于法因[22]和托马森[75]发现了所谓的*不完全的*模态逻辑。布洛克所发表的一系列论著中从代数观点彻底地研究处理了这一问题。

本书是按照以下述方式组织起来的。第一部分提供模态命题逻辑标准部分的一个简要概述，包括为我们的可定义性理论所需要的概念和结果。在第7章中，我们将定义模态公式一阶可定义性的两个概念，一个“局部的”和一个“全局的”。令人惊奇的是，这两个概念是不相同的。在第8章中用超积方法给出了这些公式的一个语义刻画。它们的语形研究在第9章中进行。但是，再一次，需要第10章中的语义方法来划定这些语形方法的范围。第11章和第12章中处理了两个较特殊的主题，以择代关系上的某个条件为准的一阶可定义性和模态谓词逻辑中公式的一阶可定义性。来自第9章的一个想法促成了模态公式“保持类”的一般概念，这个概念在第13章中得到了研究；在某种意义上，它使可定义性理论跟完全性理论联系起来。在第三部分中，重点移到一阶公式。一开始，由模态公式定义的一阶公式就在第14章得到了语义刻画。有关这一类公式的某些语形结果可在第15章中找到。什么样的框架类可用模态公式来定义这一更为一般的问题在第16章中处理。

最后，在本书的结束部分中，这一阶段所得到的概念和结果被应用到强度递增的二阶语言上，即全称二阶逻辑、一般的二阶逻辑以及有穷类型论。本著作中的技术和概念可以应用到内涵逻辑的各种各样的分支，例如，直觉主义逻辑、相干逻辑甚或量子逻辑。实际上已有一篇论文，论述了当择代关系被取成3元或n（任意）元关系时模态语言的一阶可定义性[38]。此外，罗登伯格（P. Rodenburg）已写完了一篇论述直觉主义对应理论的学位论文。另外，对高阶逻辑的可能推广似乎是最有意思的，因为它们提供了跟经典逻辑主流的一个联系（1982）。

余下要提到的是，这里介绍的理论的一个紧凑而易读的概述已在《哲学逻辑手册》（*Handbook of Philosophical Logic*, edited by D. Gabbay and F. Guenthner, Reidel, Dordrecht, 1984）第二卷中的一章出现，标题为“模态对应理论”①。

① 第二版《哲学逻辑手册》中的这一章已经得到了修订，作为新版第四卷的内容，而且翻译到了本译丛的第一卷《逻辑、信息和互动》（科学出版社，2008年）——译者注。

记号和术语

常见的集论记号和模型论记号将随意引用。此外，缩写记号⇒（如果……则……）、⇔（当且仅当）、&（且）、~（非）、∀（对于每一个）以及∃（存在）有时也会出现，以便有助于非形式说明。经典逻辑的标准结果都作为预设[17,20,72]。此外，例行性的证明都已省略，它们中大多数都是相对于（模态）公式复杂度的简单的归纳证明。

我们所要研究的模态语言是模态命题逻辑的语言（模态谓词逻辑将只在第12章中处理）。它拥有无穷多个命题字母 p_1，p_2，…，p，q，…。布尔算子是¬（非）、∧（且）、∨（或）、→（如果……则……）以及↔（当且仅当）。此外，还有两个命题常项，⊥（所谓的恒假，表示一个固定的矛盾式）和⊤（所谓的恒真，表示一个固定的重言式）。当陈述定义或证明命题时，引用极小的初始符号集常常是很方便的。这里的¬和∧就是为此而选的。但是，某些情形下宁可选择另外的初始符号集（例如，¬和∧，或者⊥和→），产生更为精致的系统表述。两个一元模态算子 L（必然）和 M（可能）被附加到布尔算子之中。二者中有一个就足以作为初始概念之用，L 可以定义为 $\neg M \neg$，而 M 也可以定义为 $\neg L \neg$。实际上，这里取 L 为初始的概念，所以¬、∧、L 是模态语言的标准初始符号集。模态公式按通常方式而得，并用小写希腊字母 φ，ψ，χ，…（可能带附标）表示公式。不用命题字母而仅由⊥和⊤构造起来的模态公式将被称为闭公式。最后，大写希腊字母 Γ，Δ，Σ，…（可能带附标）将用来表示公式集。

引言中说到的一阶语言包含有一个二元谓词常项 R 以及等词 =。它的个体变项为 x_1，x_2，…，x，y，z，u，v，w。它的布尔算子如上，而量词为∀和∃。这个语言叫做 L_0。L_0 的公式将由 α，β，γ，…（可能带附标）表示。

L_1 是带有一个二元谓词常项 R 和一元谓词常项 P_1，P_2，…，P，Q，…（分别对应于模态语言中的命题字母）的一阶语言。当这些一元谓词常项被当做谓词变项时，就得到了二阶语言 L_2。注意，L_2 只有一个一阶谓词常项，也就是 R。在本书第四部分中，将需要完整的一阶语言和二阶语言，但这里引进的四个语言对于前三部分是足够用的。

在上述语言的语义中，将用到下述模型论记号。结构将用粗体字母表示。例

如，就模态语言而言我们需要框架，由一个非空个体域（“世界”集）和该个体域上的一个二元关系（择代关系或叫可达关系）组成。记号：$\mathbf{F}$（$=\langle W, R\rangle$），$\mathbf{F}_1$（$=\langle W_1, R_1\rangle$），…。注意，框架也是 L_0 和 L_2 的结构。另外，模态语言还用到叫做模型的辅助结构。模型由一个框架 $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{F}$ 上的一个赋值 V 组成，赋值把命题字母映成 W 的子集［$V(p)$ 被认为是由所有有事态 p 出现的世界所组成的集合］。记号：$\mathbf{M}$（$=\langle \mathbf{F}, V\rangle$ 或者相替代地记成 $\langle W, R, V\rangle$），$\mathbf{M}_1$（$=\langle \mathbf{F}_1, V_1\rangle$），…。注意，模型可被按一种明显的方式当作 L_1 的结构来看。最后，还存在有一般框架，由一个框架 $\mathbf{F}$（$=\langle W, R\rangle$）和一个由 W 的某些子集的集合 $\mathbf{W}$ 组成，$\mathbf{W}$ 对交运算、（相对于 W 的）相对补运算以及如后定义的集论运算 l 都封闭：对所有的 $X\subseteq W$，$l(X)=\{w\in W \mid \forall v\in W\ (Rwv\Rightarrow v\in X)\}$。记号：$\langle \mathbf{F}, \mathbf{W}\rangle$（$=\langle W, R, \mathbf{W}\rangle$），$\langle \mathbf{F}_1, \mathbf{W}_1\rangle$（$=\langle W_1, R_1, \mathbf{W}_1\rangle$），…。亨金的一般模型是完整的二阶语言的结构，在这一意义的推广下，一般框架也是 L_2 的结构（$\mathbf{W}$ 限制谓词量词的量化范围）。在这一观点下，框架对应于 L_2 的标准模型，因而可以视同于取 W 的幂集为 $\mathbf{W}$ 的“满”一般框架。

第 2 章中的真值定义给出中心概念 $\mathbf{M}\models\varphi[w]$（$\varphi$ 在 $\mathbf{M}$ 中的 w 处成立/为真），这里 $\mathbf{M}$ 是一个模型 $\langle W, R, V\rangle$，$w\in W$，并且 φ 是一个模态公式。若干导出概念：$\mathbf{M}\models\varphi$，并且，对一个模态公式集 Σ，$\mathbf{M}\models\Sigma[w]$ 和 $\mathbf{M}\models\Sigma$ 则按显然的方式定义。对于 $\{\varphi \mid \mathbf{M}\models\varphi\}$ 有一个有用的记号为 $Th_{mod}(\mathbf{M})$。其次，$\mathbf{F}\models\varphi[w]$（$\varphi$ 在 $\mathbf{F}$ 中的 w 处成立）是对任意的框架 $\mathbf{F}$（$=\langle W, R\rangle$）和 $w\in W$ 而定义的。再次，利用这一概念定义 $\mathbf{F}\models\varphi$、$\mathbf{F}\models\Sigma[w]$、$\mathbf{F}\models\Sigma$ 和 $Th_{mod}(\mathbf{F})$。依照标准逻辑中的惯例，同样的记号$\models$ 也被用来表示普遍有效性和语义后承。$\models\varphi$ 意指“φ 普遍有效”，而 $\Sigma\models\varphi$ 则意指“φ 可从 Σ 语义地推出”。最后，这个概念在第 2 章中分裂成若干不同的概念（例如，$\models_f$ 和$\models_m$）。由于这不是经常用到，故而不会引起混淆。

若干涉及框架的语义概念将在第 2 章中引进，例如 $\mathbf{F}_1\underset{\rightarrow}{\subseteq}\mathbf{F}_2$（$\mathbf{F}_1$是 $\mathbf{F}_2$ 的生成子框架）、$\sum\{\mathbf{F}_i \mid i\in I\}$（$\{\mathbf{F}_i \mid i\in I\}$ 的不相交并）以及 $ue(\mathbf{F})$（$\mathbf{F}$ 的超滤扩充）。多回头看看这一章常常能帮读者解惑。关于代数记号，请读者参看第 4 章。模态逻辑的句法理论（参看第 5 章和第 6 章）只利用少数几个一般记号。由一个模态公式集 Σ 公理化的模态逻辑记成 $ML(\Sigma)$。公理化模态理论拥有它们常见的名称，例如，K，T，$S4$，$S5$。一个理论中的可推导性记成 $\vdash_K$，$\vdash_T$，等等。C 是由所有完全的模态逻辑所组成的类，GC 是由所有一般完全的模态逻辑所组成的类，而 CAN 则是由所有典范模态逻辑所组成的类。

最后，下述记号也时常在讨论模态公式和 L_0-公式之间的对应时用到（参看

第3章)。$E(\varphi, \alpha)$ 指模态公式 φ 和 L_0-公式 α 之间的局部等价。$\bar{E}(\varphi, \alpha)$ 指全局等价。M_1 是由所有由 L_0-公式与之局部等价的模态公式所组成的集，$\bar{M}_1$ 是由所有由 L_0-公式与之全局等价的模态公式所组成的集。对偶地，P_1 是由所有有 M_1 中公式与之等价的 L_0-公式所组成的集，$\bar{P}_1$ 是由所有由 $\bar{M}_1$ 中公式与之等价的 L_0-公式所组成的集。

其余记号大多是临时特设的，将在叙述过程中随手引入。



第一部分

模态命题逻辑的简要概述

1 历史背景

模态逻辑诞生于哲学。关于必然、可能以及偶然的逻辑早在古代（例如，亚里士多德所作）和中世纪就已得到研究。[15]它在20世纪20年代的现代复兴归功于刘易斯（C. I. Lewis）[49]。刘易斯不满意于罗素和怀特海合著《数学原理》中的实质蕴涵。根据刘易斯的观点，日常讨论中所用的“A 蕴涵 B”不只意指“并非”（A 且非 B）。因此他把所谓的严格蕴涵附加进《数学原理》的系统中，这一概念可以改述为“不可能（A 且非 B）”，或者等价地改述为“必然非（A 且非 B）”。这里我们仅对来自于这些考虑的必然及可能的概念感兴趣。我们把一元模态算子 M（可能）和 L（必然）附加进命题逻辑的语言中，正如上面所释。现代模态逻辑从研究描述 M 及 L 的逻辑行为的“正确”公理着手。某些原则相对而言是不成问题的，例如，L 和 M 的相互可定义性（$Lp\leftrightarrow\neg M\neg p$，$Mp\leftrightarrow\neg L\neg p$）、肯定前件式的模态化说法［$L(p\to q)\to(Lp\to Lq)$］以及蕴涵式 $Lp\to p$。但是结果很快就表明，我们可能得到并非一个而是多个公理理论（“模态逻辑”），其中有些已经众所周知的，例如，S4 和 S5（它们的特征公理除上述三条外还分别有$Lp\to LLp$ 和 $MLp\to Lp$）。从那时起，模态逻辑就由许许多多的公理理论的研究组成，这一现象一直持续到今天。

在20世纪30年代期间，大家曾尝试为这些理论给出一个代数语义。不过，虽然取得了一些有意思的结果[58]，但整个领域还是相当混沌。不像在标准逻辑中，塔尔斯基（A. Tarski）语义导致公理化方法和语义方法之间的一个富有成果的相互作用，在模态逻辑中这两种方法基本上还是分开的［参看《圣母形式逻辑杂志》（*Notre Dame Journal of Formal Logic*）中许多论述模态逻辑公理化的文章］。对此可以引用两个说明。首先，模态逻辑的代数探索（本身是命题逻辑真值表语义的一种推广）也许是从错误的类比开始的。在许多方面，甚至模态命题逻辑都表现得像谓词逻辑，因而塔尔斯基语义（涉及结构中的解释）的一种推

广较为合用。但是，直到1959年，克里普克才给出了这样一种语义[43] [有几位先驱，例如，坎格尔（S. Kanger）[40]]。其次，大家普遍认为，一个代数语义并不真正提供一种“心理图像”：我们几乎可以说它只不过是一种“伪装的句法”。这并不使它在技术上无用（事实上很有用），却使它在直觉上或哲学上不那么有吸引力。在1960年后的相当长的一段时期，克里普克语义把持了这一领域。但是，正如引言中所说，代数方法在当前的研究中正在引人注意地复苏。法因和托马森的“不完全性定理”[22,75]表明，最初所设想的克里普克语义本质上弱于代数语义，所以这种复苏显然是有道理的。

当代的模态逻辑常常被认为是所谓内涵逻辑的一个原型，它仍然是具有哲学意味的一个研究领域。我们只需列举一些杰出的作者就足以说明问题：奎因（Quine）[65]、欣蒂卡（Hintikka）[35]、刘易斯（D. Lewis）[50]、克里普克（Kripke）[44]以及普兰丁格（Plantinga）[63]。此外，诸如道义逻辑（冯·赖特[34]）或时态逻辑[64]等形式上类似的哲学主题也应当包括进来。除了这些哲学联系以外，模态逻辑已在语言学中得到应用，正如可从蒙塔古（R. Montague[59]）、克雷斯韦尔（M. J. Creswell）[18]和格拜[27]等人的著作中所看到的那样。然而，这里我们想要把注意力转向某些数学应用上。在一篇早期的论文[28]中，哥德尔表明海丁的直觉主义演算如何可以嵌入于模态逻辑 $S4$。哥德尔的转换也使克里普克能够系统表述他为直觉主义逻辑所作的语义[45]。关于这一方面的一个广泛的概述将出现在斯莫林斯基（Smorynski）的论文[73]中。事实上，在所谓中间逻辑（intermediate logics）上的直觉主义研究和模态逻辑上的研究有许多共同点[14]。

第二个重要进展是把算术可证性谓词处理为模态必然算子。这一探索，以蒙塔古的论文[60]为其早期的一个例子，而在索洛维（R. Solovay）的论文[74]中可以找到它现时的一个发展高潮。索洛维的论文表明，以公式 $L(Lp\rightarrow p)\rightarrow Lp$（本身是“洛伯定理”[53]的一个模态说法）为公理的模态逻辑包括（比方说）皮亚诺算术可证性谓词的所有性质。这一主题也得到了“锡耶纳学派”的研究，以1975年《逻辑研究》（*Studia Logica*）的专辑为证。

余下要陈述的是引言中所提到的模态逻辑和二阶逻辑之间的联系。

托马森[77]给出了一个从带一元谓词变项和一个二元谓词常项的一元二阶逻辑（即上述的语言 L_2）到模态公式的能行转换，使得前者中的语义后承归结为后者中的语义后承。更精确地讲就是，存在一个递归函数 t，将 L_2-语句 φ 映为模态公式 $t(\varphi)$，以及一个特定的模态公式 δ，使得对所有的 L_2-语句集 Σ，

$$\sum \models \varphi, \text{当且仅当}, \{\delta\} \cup \{t(\sigma) \mid \sigma \in \sum\} \models_f t(\varphi)$$

（这里“$\models$”表示通常的那个在由所有标准模型所形成的类上的二阶语义后承关系，而“$\models_f$”则表示在由所有框架所形成的类上的模态后承，如后面第 2 章所定义的那样）。

注意，L_2 是一种表达力极强的语言，例如，二阶策梅罗 - 弗兰克尔集论可以在其中只用单独一个全称语句 ZF^2 为公理。这一理论包含完全的算术理论，借助于算术语言的标准集论归约和 ZF^2 的模型中只含有标准自然数这一事实而得。但是，另一方面，从塔尔斯基关于算术真的算术不可定义性定理可以推断$\models$ 这一概念不是算术可定义的（作为语句的哥德尔数之间的一种关系，它不是算术可定义的），更不用说是递归可公理化的了（因为，一个算术语句为真当且仅当它的集论归约、用$\in$表达的那个一阶语句可从 ZF^2 语义地推出）。因此，关系$\models_f$ 也不能是递归可公理化的：标准模态后承不是可公理化的。

L_2表达力的强度也可由杜茨的一个未发表的结果来衡量，这一结果表明完整的二阶逻辑语言（甚至完整的有穷类型论语言）可在下述意义上归结到 L_2[19]。存在一个从任意的二阶语句 φ 到形如 $\forall R\exists P\varphi'(R, P)$ 的二阶语句 $\mathbf{T}(\varphi)$ 的、能行的转换 $\mathbf{T}$，使得

$$\models\varphi，当且仅当，\models\forall R\exists P\varphi'(R, P)$$

（这里“$\models$”表示由所有标准模型所形成的类上的有效性，R 是一个二元谓词变项，P 是一个一元谓词变项，φ'是一个用 R 和 P 表达的一阶语句）。其证明的想法是首先找出一个一阶语句 $\psi(R, P)$，使得 $\forall P\psi(\in, P)$ 定义集论累积系列中 α 为大于 ω 的极限序数的层次 V_α。这可以跟二阶（或者还有高阶）语义的、熟知的（一阶）集论定义 τ 结合起来。即对于所有这样的语句χ（带集论“哥德尔编码”$\ulcorner\chi\urcorner$）以及所有具有适当类型的模型 $\mathbf{A}\in V_\alpha$，

$$V_\alpha\models\tau(\in, A, \ulcorner\chi\urcorner)，当且仅当，\mathbf{A}\models\chi。$$

因此，上述归约呈现如下形式：

$$\begin{aligned}\models\chi\quad&当且仅当\quad\models\forall R(\forall P\psi(R, P)\rightarrow\forall x\tau(R, x, \ulcorner\chi\urcorner))\\&当且仅当\quad\models\forall R\exists P(\psi(R, P)\rightarrow\forall x\tau(R, x, \ulcorner\chi\urcorner))。\end{aligned}$$

托马森的结果和杜茨的结果合起来可以推断，在某种意义下，模态公式可以给有穷类型论作归约类之用。因为，对于后者语言中的任意语句 φ 而言，

$$\begin{aligned}\models\varphi\quad&当且仅当\quad\models\mathbf{T}(\varphi)\qquad(=\forall R\exists P\varphi'(R, P))\\&当且仅当\quad\models\exists P\varphi'(R, P)\\&当且仅当\quad\{\delta\}\models_f t(\exists P\varphi'(R, P))。\end{aligned}$$

那个特定的模态公式 δ 在这个结果中是不可省的。因为，正如后面第 4 章中将证明的那样，模态公式的普遍有效性是一个递归概念，而高阶语句的普遍有效性当

然不是递归概念［要明白这一点，（例如）注意在上述例子中，$ZF^2 \models \varphi$，当且仅当，二阶语句 $ZF^2 \to \varphi$ 是普遍有效的］。

除了如上所述，对更为一般的背景知识我们不再阐述。请读者参阅下述文献：［36］是一个很好的导论；［67］有关于完全性理论的一个精彩短论；［30］是论述“模态代数”的重要专著。

2 可能世界语义

模态命题语言的语义结构是框架 $\mathbf{F}$，由一个非空的个体域 W 和 W 上的一个二元关系 R 组成。因此，$\mathbf{F}=\langle W, R\rangle$（还有 $\mathbf{F}_1=\langle W_1, R_1\rangle$，等等）。除了这些之外还将用到被称为模型的辅助结构 $\mathbf{M}$，由一个框架 $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{F}$ 上的一个赋值 V 组成，V 为命题字母指派 W 的子集。因此，$\mathbf{M}=\langle \mathbf{F}, V\rangle$，有时也被认作 $\langle W, R, V\rangle$（还有 $\mathbf{M}_1=\langle \mathbf{F}_1, V_1\rangle$，等等）。最后，还需要有所谓的一般框架，不过这些结构将在较方便的地方（在第 4 章中）定义。

基本的真值定义（归功于克里普克）如下：

定义 2.1 令 $\mathbf{M}$（$=\langle W, R, V\rangle$）是一个模型，$w\in W$，并且令 φ 是一个模态公式。$\mathbf{M}\models\varphi[w]$（"$\varphi$ 在 $\mathbf{M}$ 中的 w 处成立"）由下述条款递归定义：

(i) 对任意一个命题字母 p，$\mathbf{M}\models p[w]$，当且仅当，$w\in V(p)$；

(ii) $\mathbf{M}\models\neg\varphi[w]$，当且仅当，并非 $\mathbf{M}\models\psi[w]$；

(iii) $\mathbf{M}\models(\varphi\wedge\psi)[w]$，当且仅当，$\mathbf{M}\models\varphi[w]$ 且 $\mathbf{M}\models\psi[w]$；

(iv) $\mathbf{M}\models L\varphi[w]$，当且仅当，对于所有的 $v\in W$，若 Rwv，则 $M\models\varphi[v]$。

初始符号的另一种选择将产生下述条款：

(v) $\mathbf{M}\models M\varphi[w]$，当且仅当，对于某个 $v\in W$，使得 Rwv 成立且 $\mathbf{M}\models\varphi[v]$；

(vi) $\mathbf{M}\models(\varphi\rightarrow\psi)[w]$，当且仅当，若 $\mathbf{M}\models\varphi[w]$，则 $\mathbf{M}\models\psi[w]$；

(vii) 没有 $\mathbf{M}$ 和 w 使得 $\mathbf{M}\models\bot[w]$ 成立。

利用定义 2.1，可以定义若干导出概念：

(a) 对一个模态公式集 Σ 而言，$\mathbf{M}\models\Sigma[w]$ 是指对各个 $\sigma\in\Sigma$ 都有 $\mathbf{M}\models\sigma[w]$；

(b) $\mathbf{M}\models\varphi$，是指对所有的 $w\in W$ 都有 $\mathbf{M}\models\varphi[w]$；

(c) $\mathbf{M}\models\Sigma$，是指对各个 $\sigma\in\Sigma$ 都有 $\mathbf{M}\models\sigma$；

(d) $Th_{mod}(\mathbf{M})=\{\varphi\mid\mathbf{M}\models\varphi\}$；

(e) $MOD(\varphi)=\{\mathbf{M}\mid\mathbf{M}\models\varphi\}$；

(f) $MOD(\Sigma)=\{\mathbf{M}\mid\mathbf{M}\models\Sigma\}$。

此外，我们将采用下述缩写：“$M \nvDash \varphi[w]$”表示“并非 $M \vDash \varphi[w]$”，而“$M \nvDash \varphi$”，等等也都有类似的意义。这个“斜杠否定”很容易推广到整批的记号上，并且常常是不言而喻地使用。

称一个模态公式 φ 为*普遍有效的*，记成 $\vDash \varphi$，是指它在所有模型中的每一个 w 处都成立。

下一定义将规定模态公式和框架之间的一个直接“联系”。

定义 2.2 令 $\mathbf{F}(=\langle W, R\rangle)$ 是一个框架，$w \in W$，并且令 φ 是一个模态公式。$\mathbf{F} \vDash \varphi[w]$（“*$\varphi$ 在 $\mathbf{F}$ 中的 w 处成立/为真*”），是指对 $\mathbf{F}$ 上的所有 V 都有 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \vDash \varphi[w]$。

$\mathbf{F} \vDash \Sigma[w]$，$\mathbf{F} \vDash \varphi$，$\mathbf{F} \vDash \Sigma$，$Th_{mod}(\mathbf{F})$，$FR(\varphi)$ 和 $FR(\Sigma)$ 也都可以按一种明显的方式定义出来。

改写这些定义的另一种方式就是为所有公式 φ 定义 $V(\varphi)$，从 p 在 V 下的值 $V(p)$ 开始通过类似于上面给出的递归过程来定义。这个记法会偶尔用到，并且，$V(\varphi)$ 也因此而被定义为 $\{w \in W \mid \langle \mathbf{F}, V\rangle \vDash \varphi\ [w]\}$。$\mathbf{F}$ 究竟指哪一个，这总是可从上下文弄清的。

若干简单的结果将具体说明这些定义。

引理 2.3（同构引理） 如果 f 是一个从框架 $\mathbf{F}_1$ 到框架 $\mathbf{F}_2$ 上的同构，那么对所有 $w \in W_1$ 和所有模态公式 φ，$\mathbf{F}_1 \vDash \varphi[w]$，当且仅当，$\mathbf{F}_2 \vDash \varphi[f(w)]$。

引理 2.4（有穷性引理） 如果 φ 至多含有命题字母 p_1，…，p_n，并且 V_1，V_2 是 $\mathbf{F}$ 上的两个赋值，使得对各个 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$，$V_1(p_i)=V_2(p_i)$，那么对任意一个 $w \in W$，$\langle \mathbf{F}, V_1\rangle \vDash \varphi[w]$，当且仅当，$\langle \mathbf{F}, V_2\rangle \vDash \varphi[w]$。

引理 2.5（代入引理） 如果 $[\psi_1/p_1, \cdots, \psi_n/p_n]\varphi$ 指在 φ 中同时进行 ψ_i 代入 $p_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 后的结果，那么对任意模型 $\langle \mathbf{F}, V\rangle$ 和 $w \in W$，$\langle \mathbf{F}, V\rangle \vDash [\psi_1/p_1, \cdots, \psi_n/p_n]\varphi[w]$，当且仅当，$\langle \mathbf{F}, V(p_1/V(\psi_1), \cdots, p_n/V(\psi_n))\rangle \vDash \varphi[w]$；这里 $V(p_1/V(\psi_1), \cdots, p_n/V(\psi_n))$ 除了为 p_i 指定值 $V(\psi_i)(1 \leqslant i \leqslant n)$ 外完全相同于 V。

下一个引理较不明显。要陈述它，必须先定义两个重要概念。

定义 2.6 一个模态公式 φ 的度 $d(\varphi)$ 是指 φ 中模态算子嵌套序列的最大长度；或者，归纳定义如下：

(i) 对命题字母 p，$d(p)=0$；

(ii) $d(\neg\varphi)=d(\varphi)$；

(iii) $d(\varphi \wedge \psi)=\max(d(\varphi), d(\psi))$ ［即 $d(\varphi)$，$d(\psi)$ 中之大者］；

(iv) $d(L\varphi)=d(\varphi)+1$。

定义 2.7　令 $\mathbf{F}(=\langle W, R\rangle)$ 是一个框架，$w\in W$。$S_n(\mathbf{F}, w)$（“w 的 n-外壳”）是递归于 n 上而定义的：

(i) $S_0(\mathbf{F}, w)=\{w\}$；

(ii) $S_{n+1}(\mathbf{F}, w)=S_n(\mathbf{F}, w)\cup\{v\in W\mid$ 对某个 $u\in S_n(\mathbf{F}, w)$ 有 $Ruv\}$。

引理 2.8　就任意框架 $\mathbf{F}$、任意 $w\in W$ 和 $\mathbf{F}$ 上任意两个使得对所有命题字母 p 有 $V_1(p)\cap S_n(\mathbf{F}, w)=V_2(p)\cap S_n(\mathbf{F}, w)$ 的赋值 V_1 和 V_2 而言，对于任意满足 $d(\varphi)\leqslant n$ 的模态公式 φ，我们有 $\langle\mathbf{F}, V_1\rangle\models\varphi[w]$，当且仅当，$\langle\mathbf{F}, V_2\rangle\models\varphi[w]$。

这一引理可以用来证明下述结论：对于模态公式来说，如果只涉及框架，$\rightarrow$ 和 M 这两个初始符号已经足够。

推论 2.9　对于任意模态公式 φ，存在一个其逻辑常项仅为 $\rightarrow$ 和 M 的模态公式 φ_1，使得对于所有的框架 $\mathbf{F}(=\langle W, R\rangle)$ 和 $w\in W$ 都有

$$\mathbf{F}\models\varphi[w]\text{，当且仅当，}\mathbf{F}\models\varphi_1[w]\text{。}$$

证明：若 $d(\varphi)=0$，则 φ 正好是一个命题公式，并且，φ 或者是重言式（因而 φ_1 可以取为 $(p\rightarrow p)$），或者不是重言式（因而没有 $\mathbf{F}$ 和 w 使得 $\mathbf{F}\models\varphi[w]$，$\varphi_1$ 则可以取为 p）。若 $d(\varphi)>0$，则 φ_1 如下而得。先把 φ 改写成仅由 M、$\perp$ 和 $\rightarrow$ 表达的一个等值的公式 φ_2。然后，所要求的 φ_1 就是 $(M^{d(\varphi 2)}q\rightarrow q)\rightarrow(\cdots((M^1q\rightarrow q)\rightarrow(([q/\perp]\varphi_2\rightarrow q)\rightarrow q))\cdots)$，这里 $M^i\varphi=_{def}M\cdots$（i 次）$\cdots M\varphi$ 而 q 是任意一个不在 φ_2 中出现的命题字母。

取 $\varphi=M\neg p\rightarrow\neg Mp$，则 $\varphi_2=M(p\rightarrow\perp)\rightarrow(Mp\rightarrow\perp)$，并且 $\varphi_1=(Mq\rightarrow q)\rightarrow(((M(p\rightarrow q)\rightarrow(Mp\rightarrow q))\rightarrow q)\rightarrow q)$；这就得到了上述过程的一个例子。

如此定义 φ_1 的缘由从下述论证来看将变得更为明白［现在就回想一下重言式 $((\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow\psi)\leftrightarrow(\varphi\vee\psi)$］。首先，注意我们可以认为 φ 和 φ_2 在下述意义上是强等值的：对于所有的模型 $\mathbf{M}$ 和所有的 w，$\mathbf{M}\models\varphi[w]$，当且仅当，$\mathbf{M}\models\varphi_2[w]$。于是，若 $\mathbf{F}\models\varphi_1[w]$，则对 $\mathbf{F}$ 上任意一个为 q 指派空集的赋值 V，$\langle\mathbf{F}, V\rangle\models\varphi_1[w]$。换句话说就是：$\mathbf{F}\models[\perp/q]\varphi_1[w]$。但是另一方面，由于 $M^i\perp\rightarrow\perp$ 是普遍有效的，故而有 $\mathbf{F}\models[\perp/q](([q/\perp]\varphi_2\rightarrow q)\rightarrow q)[w]$，即 $\mathbf{F}\models(\varphi_2\rightarrow\perp)\rightarrow\perp\ [w]$。因此有 $\mathbf{F}\models\varphi_2[w]$，从而 $\mathbf{F}\models\varphi[w]$。为了建立其逆，假定 $\mathbf{F}\models\varphi[w]$。此外，令 V 是 $\mathbf{F}$ 上的一个赋值，使得对各个 $i(1\leqslant i\leqslant d(\varphi_2))$ 有 $\langle\mathbf{F}, V\rangle\models M^iq\rightarrow q[w]$。要证明的是 $\langle\mathbf{F}, V\rangle\models(([q/\perp]\varphi_2\rightarrow q)\rightarrow q)[w]$。于是，或者 $\langle\mathbf{F}, V\rangle\models q[w]$（此时没什么要证的），或者 $\langle\mathbf{F}, V\rangle\not\models q[w]$，此时要证的是 $\langle\mathbf{F}, V\rangle\models[q/\perp]\varphi_2\ [w]$。注意，由于 $\langle\mathbf{F}, V\rangle\not\models q[w]$，故而对任意 $i(1\leqslant i\leqslant d(\varphi_2))$ 都有 $\langle\mathbf{F}, V\rangle\not\models M^iq\ [w]$。换句话说，$V(q)\cap S_{d(\varphi 2)}(\mathbf{F}, w)=\varnothing$。引理 2.8 蕴涵着，$\langle\mathbf{F}, V\rangle\models[q/\perp]\varphi_2[w]$，当且仅当，$\langle\mathbf{F}, V(q/\varnothing)\rangle\models[q/\perp]\varphi_2[w]$。而后者成立，当且仅当，

$\langle \mathbf{F}, V\rangle \models \varphi_2[w]$。而这又可从 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models \varphi[w]$ 这一事实得出。 ■

下面引进跟框架有关的基本概念。

定义 2.10 框架 $\mathbf{F}_1(=\langle W_1, R_1\rangle)$ 为框架 $\mathbf{F}_2(=\langle W_2, R_2\rangle)$ 的一个子框架，记成 $\mathbf{F}_1 \subseteq \mathbf{F}_2$，是指①$W_1 \subseteq W_2$ 和②$R_1 = R_2 \cap (W_1 \times W_1)$。称 $\mathbf{F}_1$ 为 $\mathbf{F}_2$ 的一个生成子框架，记成 $\mathbf{F}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathbf{F}_2$，是指 $\mathbf{F}_1$ 为 $\mathbf{F}_2$ 的子框架并使得对于所有的 $w \in W_1$，$v \in W_2$，R_2wv 那么 $v \in W_1$。称模型 $\mathbf{M}_1(=\langle \mathbf{F}_1, V_1\rangle)$ 为模型 $\mathbf{M}_2(=\langle \mathbf{F}_2, V_2\rangle)$ 的一个子模型，记成 $\mathbf{M}_1 \subseteq \mathbf{M}_2$，是指 $\mathbf{F}_1$ 为 $\mathbf{F}_2$ 的一个子框架并且对各个命题字母 p 有 $V_1(p) = V_2(p) \cap W_1$。如果 $\mathbf{F}_1$ 还是 $\mathbf{F}_2$ 的一个生成子框架，则称 $\mathbf{M}_1$ 为 $\mathbf{M}_2$ 的一个生成子模型，记成 $\mathbf{M}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathbf{M}_2$。

"生成子框架"这一概念跟更为我们熟知的概念"端扩张"[17]密切相关。

引理 2.11（生成定理[21,69]） 如果 $\mathbf{M}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathbf{M}_2$，那么对于所有的 $w \in W_1$ 和所有的模态公式 φ，$\mathbf{M}_1 \models \varphi[w]$，当且仅当，$\mathbf{M}_2 \models \varphi[w]$。

下面的结论也成立，它有几分像是引理 2.11 的逆定理：令 $\mathbf{F}_1$ 是 $\mathbf{F}_2$ 的子框架。给定 $\mathbf{F}_2$ 上的一个赋值 V_2，定义 $\mathbf{F}_1$ 上的赋值 V_1 如下：对于所有的命题字母 p 取 $V_1(p) = V_2(p) \cap W_1$。那么，若对 $\mathbf{F}_2$ 上的所有赋值 V_2、所有 $w \in W_1$ 和所有模态公式 φ 都有 $\langle \mathbf{F}_2, V_2\rangle \models \varphi[w]$，当且仅当，$\langle \mathbf{F}_1, V_1\rangle \models \varphi[w]$，则 $\mathbf{F}_1$ 是 $\mathbf{F}_2$ 的一个生成子框架。

推论 2.12 如果 $\mathbf{F}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathbf{F}_2$，那么对于所有的 $w \in W_1$ 和所有的模态公式 φ，

$\mathbf{F}_2 \models \varphi[w]$ 当且仅当 $\mathbf{F}_1 \models \varphi[w]$，

$\mathbf{F}_2 \models \varphi \Rightarrow \mathbf{F}_1 \models \varphi$，（即模态公式对生成子框架保持）。

推论 2.12 蕴涵着，L_0-语句 $\exists x \exists y Rxy$ 不可由任意一个模态公式来定义——它不对生成子框架保持。

下面定义的是一种重要的生成子框架。

定义 2.13 令 $\mathbf{F}$ 是一个框架且 $w \in W$。$\mathbf{F}$ 的、由 w 生成的子框架 $[TC(\mathbf{F}, w)]$ 是指使得 $w \in W_1$ 的、$\mathbf{F}$ 的最小生成子框架 $\mathbf{F}_1(=\langle W_1, R_1\rangle)$；即 $W_1 = \cap\{X \subseteq W \mid w \in X$，且对于所有的 $v \in X$ 和 $u \in W$，若 Rvu，则 $u \in X\} = \{v \in X \mid$ 有序列 $v_1, \cdots, v_n$ 使得 $w = v_1$，$v = v_n$，并且对各个 $i(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ 有 $Rv_iv_{i+1}\}$。若对某个 $w \in W$ 而言，框架 $\mathbf{F}$ 为 $TC(\mathbf{F}, w)$，则称它为生成的。

显然，$\mathbf{F} \models \varphi[w]$，当且仅当 $TC(\mathbf{F}, w) \models \varphi[w]$。

下一概念是从多个框架构造出一个框架。

定义 2.14 令 $\{\mathbf{F}_i \mid i \in I\}$ 是一族框架。设 $\mathbf{F}'_i(=\langle W'_i, R'_i\rangle)$，这里 $W'_i = \{\langle i, w\rangle \mid w \in W_i\}$ 且 $R'_i = \{\langle\langle i, w\rangle, \langle i, v\rangle\rangle \mid \langle w, v\rangle \in R_i\}$。框架族 $\{\mathbf{F}_i \mid i \in I\}$ 的不相交并 $\sum\{\mathbf{F}_i \mid i \in I\}$，是指框架 $\langle \cup\{W'_i \mid i \in I\}, \cup\{R'_i \mid i \in I\}\rangle$。

对各个 $i \in I$，$\mathbf{F}_i$ 同构于 $\sum\{F_i \mid i \in I\}$ 的生成子框架 $\mathbf{F}'_i$，因而有推论 2.15。

推论 2.15　对各个 $i \in I$，$w \in W_i$ 和所有模态公式 φ，$\mathbf{F}_i \models \varphi[w]$，当且仅当，$\sum\{\mathbf{F}_i \mid i \in I\} \models \varphi[\langle i, w\rangle]$；因此，$\sum\{\mathbf{F}_i \mid i \in I\} \models \varphi$，当且仅当，对各个 $i \in I$ 都有 $\mathbf{F}_i \models \varphi$。

如果对各个 $i \in I$ 都有 $\mathbf{F}_i \models \varphi$，那么 $\sum\{\mathbf{F}_i \mid i \in I\} \models \varphi$，这一事实被表达为模态公式对不相交并保持。推论 2.15 意味着，$\forall x \forall y Rxy$ 不可由任意一个模态公式定义（虽然对生成子框架保持），因为它不对不相交并保持。

定义 2.16　从框架 $\mathbf{F}_1$ 到框架 $\mathbf{F}_2$ 的一个映射 f 为一个 p-态射，是指①对于所有的 w，$v \in W_1$，若 R_1wv 则 $R_2f(w)f(v)$（即 f 是一个同态）；并且②对于所有的 $w \in W_1$ 和 $v \in W_2$，若 $R_2f(w)v$ 则有 $u \in W_1$ 使得 R_1wu 且 $f(u) = v$。称一模型 $\langle \mathbf{F}_1, V_1\rangle$ 到一模型 $\langle \mathbf{F}_1, V_1\rangle$ 的一个映射 f 为一个 p-态射，是指它是从 $\mathbf{F}_1$ 到 $\mathbf{F}_2$ 的一个 p-态射并且对各个 $w \in W_1$ 和各个命题字母 p 有 $w \in V_1(p)$，当且仅当，$f(w) \in V_2(p)$。

注意，任意一个一一到上的 p-态射就是一个同构。p-态射这一概念最初是由塞格伯格在［69］中定义的。更早一点的一个类似的概念（“强保序映射”）在文献［39］中。

引理 2.17（p-态射定理[69]）　如果 f 是从 $\mathbf{M}_1$ 到 $\mathbf{M}_2$ 上的一个 p-态射，那么对于所有的 $w \in W_1$ 和所有的模态公式 φ，$\mathbf{M}_1 \models \varphi[w]$，当且仅当，$\mathbf{M}_2 \models \varphi[f(w)]$。

下面的结论也成立，它有点像是引理 2.17 的逆：令 f 是任意一个从 $\mathbf{F}_1$ 到 $\mathbf{F}_2$ 上的一个映射。给定 $\mathbf{F}_2$ 上的一个赋值 V_2，$f^{-1}(V_2)$ 就是 $\mathbf{F}_1$ 上由 $f^{-1}(V_2)(p) = f^{-1}[V_2(p)]$ 定义的那个赋值。那么，若对 $\mathbf{F}_2$ 上的所有赋值 V_2、所有 $w \in W_1$ 和所有模态公式 φ 都有 $\langle \mathbf{F}_1, f^{-1}(V_2)\rangle \models \varphi[w]$，当且仅当，$\langle \mathbf{F}_2, V_2\rangle \models \varphi[f(w)]$，则 f 是一个 p-态射。

推论 2.18　如果 f 是从 $\mathbf{F}_1$ 到 $\mathbf{F}_2$ 上的一个 p-态射，那么对于所有的 $w \in W_1$ 和所有的模态公式 φ，

$$\mathbf{F}_1 \models \varphi[w] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_2 \models \varphi[f(w)],$$

$$\mathbf{F}_1 \models \varphi \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_2 \models \varphi$$（即模态公式对 p-态射像保持）。

由此可知，$\forall x \neg Rxx$ 虽然对生成子框架和不相交并都保持，但不可由任意一个模态公式来定义。因为，它不在从 $\langle IN, <\rangle$ 到 $\langle \{0\}, \{\langle 0, 0\rangle\}\rangle$ 上的 p-态射 f 下保持，这里对于所有的 $n \in IN$ 定义 $f(n) = 0$。

引理 2.17 有若干有意思的结论。

引理 2.19[57]　对任意框架 $\mathbf{F}$ 和任意模态公式 φ，如果 $\mathbf{F} \models \varphi$，那么 $\langle \{0\},$

$\{\langle 0, 0\rangle\}\rangle \vDash \varphi$ 或者 $\langle\{0\}, \varnothing\rangle \vDash \varphi$。

证明：若 W 含有一个无 R-后继的元素 w，则 $\langle\{w\}, \varnothing\rangle \subseteq_{\rightarrow} \mathbf{F}$。因此据推论 2.12 可知，$\langle\{w\}, \varnothing\rangle \vDash \varphi$。当然，$\langle\{w\}, \varnothing\rangle$ 同构于 $\langle\{0\}, \varnothing\rangle$①。

若 W 的每一个元素都有 R-后继，则对于所有的 $w \in W$ 规定 $f(w)=0$ 所定义的 f 是从 $\mathbf{F}$ 到 $\langle\{0\}, \{\langle 0, 0\rangle\}\rangle$ 上的一个 p-态射，因而据推论 2.18 有 $\langle\{0\}, \{\langle 0, 0\rangle\}\rangle \vDash \varphi$。 ■

引理 2.20 任意一个框架 $\mathbf{F}$ 都是生成框架的某个不相交并的一个 p-态射像。

证明：下面的规定定义了从 $\sum\{TC(\mathbf{F}, w) \mid w \in W\}$ 到 $\mathbf{F}$ 上的一个 p-态射：$f(w,v)=v$。 ■

引理 2.21（树引理[66]） 任意一个生成框架 $\mathbf{F}$ 都是某个禁自返、不传递也无 R-圈出现的树的一个 p-态射像。

证明：令对 $w \in W$，$\mathbf{F}=TC(\mathbf{F}, w)$。如此定义一个树：它的结点为满足 Rw_1w_2，…，$Rw_{n-1}w_n$ 的有穷序列 $\langle w_1, \cdots, w_n\rangle$（$w_1$，…，$w_n \in W$），而它的后继关系则把满足 $Rw_{n-1}w_n$ 的结点 $\langle w_1, \cdots, w_n\rangle$ 和 $\langle w_1, \cdots, w_n, w_{n+1}\rangle$ 联结起来。由 $f(\langle w_1, \cdots, w_n\rangle)=w_n$ 所定义的映射 f 是这个树到 $\mathbf{F}$ 上的一个 p-态射。 ■

推论 2.22 任意一个并非普遍有效的模态公式 φ 一定在某个有穷的禁自返、不传递的树上为假。

证明：若 φ 不是普遍有效的，则对某个 $\mathbf{F}$ 和 w 有 $\mathbf{F} \nvDash \varphi[w]$。据 2.12，$TC(\mathbf{F},w) \nvDash \varphi[w]$。因此，据引理 2.21 和推论 2.18，$\varphi$ 在某个禁自返、不传递的树上为假。下一个引理蕴涵着，这个树的某个有穷子树足以使 φ 为假。 ■

引理 2.23 令 $\mathbf{F}$ 是一个禁自返、不传递的树，其中也无 R-圈出现；V 是 $\mathbf{F}$ 上的一个赋值且 $w \in W$。令 φ_1，…，φ_n，ψ_1，…，ψ_m 是模态公式，使得对各个 i（$1 \leqslant i \leqslant n$）有 $\mathbf{M}(=\langle\mathbf{F}, V\rangle) \vDash \varphi_i[w]$，但没有一个 $j(1 \leqslant j \leqslant m)$ 使得 $\mathbf{M} \vDash \psi_j[w]$ 成立。那么，$TC(\mathbf{M}, w)$ 有一个含有 w 的有穷子模型 $\mathbf{M}'$ 使得对各个 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 有 $\mathbf{M}' \vDash \varphi[w]$，但没有一个 $j(1 \leqslant j \leqslant m)$ 使 $\mathbf{M}' \vDash \psi_j[w]$ 成立。

证明：这引理的证明是施归纳于 φ_1，…，φ_n，ψ_1，…，ψ_m 中出现的布尔算子和模态算子的总个数 N 上而进行的。如果 $N=0$，则只需取个体域为 $\{w\}$ 的子模型 $\mathbf{M}'$ 就行。如果假定本引理已对小于 N 的自然数都成立，则对 N 的处理如下。如果布尔归约是可能的，则过程是不足道的。若不是，则各个 φ_n 和 ψ_j 或是一个命题字母，或是形如 $L\chi$。令 $L\chi_1$，…，$L\chi_r$ 是出现在 ψ_1，…，ψ_m 中属于第二种的全部公式。选取 w_1，…，$w_r \in W$ 使得对各个 $i(1 \leqslant i \leqslant r)$，$Rww_i$，但 $\mathbf{M} \nvDash$

① 经与作者商议，添加"当然，$\langle\{w\}, \varnothing\rangle$ 同构于 $\langle\{0\}, \varnothing\rangle$"——译者注。

$\chi_i[w_i]$。据归纳假设可知，存在有 $TC(\mathbf{M}, w_1)$，…，$TC(\mathbf{M}, w_r)$ 的有穷子模型 $\mathbf{M}'_1$，…，$\mathbf{M}'_r$，分别含有 w_1，…，w_r，并使得对出现在 φ_1，…，φ_n 之间的所有公式 $L\varphi$ 和各个 $i(1\leqslant i\leqslant r)$ 有 $\mathbf{M}'_i \models \varphi[w_i]$，但 $\mathbf{M}'_i \not\models \chi_i[w_i]$。由 $\mathbf{M}'_1$，…，$\mathbf{M}'_r$ 的并附加 w 而得到的、$\mathbf{M}$ 的子模型就是所要求的 $\mathbf{M}'$（要明白这一点请注意，对任意 $v\in W'_1\cup\cdots\cup W'_r$ 而言，w 都不属于 v 的 n-外壳；因为否则的话 $\mathbf{F}$ 将会有一个 R-圈。因此，据引理 2.8 可知，附加 w 并不改变模态公式在 $\mathbf{M}'_1$，…，$\mathbf{M}'_r$ 中的真假）。■

下一个跟框架有关的概念是由第 4 章的代数理论启发而得的。

回想一下前面引进的记号"$l(X)$"：对一个框架 $\mathbf{F}=\langle W, R\rangle$ 和 $X\subseteq W$ 而言，$l(X)=\{w\in W \mid$ 对于所有的 $v\in W$，若 Rwv，则 $v\in X\}$。

定义 2.24　框架 $\mathbf{F}(=\langle W, R\rangle)$ 的*超滤扩充* $ue(\mathbf{F})$ 是这样的一个框架 $\langle W_{\mathbf{F}}, R_{\mathbf{F}}\rangle$：它的个体域 $W_{\mathbf{F}}$ 由 W 上的所有超滤组成，而它的关系 $R_{\mathbf{F}}$ 则由那些满足后述条件的超滤对 U_1，U_2 组成：对于所有的 $X\subseteq W$，若 $l(X)\in U_1$，则 $X\in U_2$。

引理 2.25　如果 V 是 $\mathbf{F}$ 上的赋值，并且 $ue(V)$ 是 $ue(\mathbf{F})$ 上由 $ue(V)(p)=\{U \mid V(p)\in U\}$ 定义的赋值，那么对于 W 上的所有超滤 U 和所有模态公式 φ，$\langle ue(\mathbf{F}), ue(V)\rangle \models \varphi[U]$，当且仅当，$V(\varphi)\in U$。

证明：施归纳于的 φ 复杂度上。$\varphi=p$ 时的情形是不足道的，利用 $ue(V)$ 的定义就可。$\varphi=\neg\psi$ 和 $\varphi=\psi\wedge\chi$ 的情形是例行的。然后考虑 $\varphi=L\psi$ 的情形。若 $V(L\psi)(=l(V(\psi)))\in U$，则据 $R_{\mathbf{F}}$ 的定义可知，对于所有满足 $R_{\mathbf{F}}UU_1$ 的 U_1 有 $V(\psi)\in U_1$。因此，据归纳假设可知，在这样的 U_1 中，$\langle ue(\mathbf{F}), ue(V)\rangle \models \psi[U_1]$；从而，$\langle ue(\mathbf{F}), ue(V)\rangle \models L\psi[U]$。余下要证明的是反方向的结论，这不是那么不足道的。

设 $V(L\psi)\notin U$①。必须找出一个超滤 U_1，使得 $R_{\mathbf{F}}UU_1$ 和 $\langle ue(\mathbf{F}), ue(V)\rangle \not\models \psi[U_1]$，即据归纳假设，$V(\psi)\notin U_1$。要得到这样一个 U，只需证明集合 $\{X\subseteq W \mid l(X)\in U\}\cup\{W-V(\psi)\}$ 具有有穷交性质即可［因为在那种情形下，可以引用超滤基本定理把它扩张成一个不含有 $V(\psi)$ 的超滤 U_1；就此而言，显然若 $l(X)\in U$，则 $X\in U_1$］。因此，假定对某些如所描述的 X_1，…，X_n，$X_1\cap\cdots\cap X_n\cap(W-V(\psi))=\varnothing$，即，$X_1\cap\cdots\cap X_n\subseteq V(\psi)$。于是，$l(X_1\cap\cdots\cap X_n)=l(X_1)\cap\cdots\cap l(X_n)\subseteq l(V(\psi))=V(L\psi))$。但是，这个交集是在 U 中的，因而 $V(L\psi)$ 也是在 U 中的，矛盾于所设 $V(L\psi)\notin U$。■

推论 2.26　对任意框架 $\mathbf{F}$ 和任意模态公式 φ，若 $ue(\mathbf{F})\models\varphi$，则 $\mathbf{F}\models\varphi$。

---

① 这里原书为 $V(L\psi)\in U$，有误——译者注。

由此可知，虽然L_0-语句$\forall x \exists y(Rxy \wedge Ryy)$ 对生成子框架、不相交并和p-态射都保持，但不可由任意一个模态公式定义。因为它的否定不对超滤扩充保持。这可以$\mathbf{F} = \langle IN, < \rangle$ 为例来说明，它的否定在此框架中成立，而它本身则在$ue(\langle IN, < \rangle)$ 中成立。要明白这一点，请注意对IN上的任意一个超滤U_1和任意一个自由超滤U_2而言，$R_{\mathbf{F}}U_1U_2$成立［因为，若$l(X) \in U_1$，则X一定是余有穷的；从而$X \in U_2$，由U_2为自由的而得］。尤其是，这蕴涵着对于所有的自由超滤U有$R_{\mathbf{F}}UU$。因此，$\forall x \exists y(Rxy \wedge Ryy)$ 在$ue(\langle IN, < \rangle)$ 上显然成立（这一证明归功于 Goldblatt & Thomason[31]）。

并非所有的模态公式都对超滤扩充保持。"洛伯公式" $L(Lp \to p) \to Lp(LF)$ 就是一个反例。正如第3章将要说明的那样，LF恰好在R为传递关系而其逆关系为良基关系的框架$\mathbf{F}(=\langle W, R \rangle)$ 上成立。例如，$\langle IN, < \rangle \models LF$。但是，依据一个类似于上述论证的论证可知，$ue(\langle IN, > \rangle)$ 原来是含有自返元素的。因此，它的关系之逆不是良基的，从而LF不成立。不过，在第6章、第13章以及第16章中将会看到，对超滤扩充保持的模态公式（所谓的典范模态公式）其全体形成一个很重要的公式类。

引理 2.27 任意一个框架$\mathbf{F}$都可以同构地嵌入为$ue(\mathbf{F})$ 的一个子框架。

证明：所要的嵌入f由$f(w) = \{X \subseteq W \mid w \in X\}$ 给出。 ■

不过，$\mathbf{F}$不一定同构于$ue(\mathbf{F})$ 的一个生成子框架，正如由例子$\forall x \exists y(Rxy \wedge Ryy)$ 所表明的那样。它在$ue(\langle IN, < \rangle)$ 中成立并且对生成子框架保持，但它并不在$\langle IN, < \rangle$ 中成立。

迄今为止，所引进的主要概念（生成子框架，不相交并，p-态射像和超滤扩充）都有一个强的代数动机。正如将在第4章中看到的那样，在某种意义下它们对应于后述的代数概念：同态像、直积、子代数和斯通表示。而且，定理 2.28（将在第16章中证明）表明，它们刻画了能定义一阶关系性质的模态公式。

定理 2.28[31] 一个对初等等价封闭的框架类是对某个模态公式集Σ而言具有形式$\{\mathbf{F} \mid \mathbf{F} \models \Sigma\}$ 的，当且仅当，它对生成子框架、不相交并和p-态射像封闭而且它的补类对超滤扩充封闭。

可惜，如若没有对初等等价封闭这一限制（即限制于$\Sigma\Delta$-初等类，参看第8章），定理 2.28 并不一般地成立。这一点可从第3章中的一个反例得出。

另一个重要概念是过滤[69]。

定义 2.29 令$\mathbf{M}_1(=\langle W_1, R_1, V_1 \rangle)$ 和$\mathbf{M}_2(=\langle W_2, R_2, V_2 \rangle)$ 是模型，并令Σ是对构成子公式封闭的一个模态公式集。一个从$\mathbf{M}_1$到$\mathbf{M}_2$上的映射g为相对于Σ的一个过滤，仅当下述三个条件都得到满足：

（1）对于所有的 w，$v \in W_1$，若 R_1wv，则 $R_2g(w)g(v)$（即，g 是同态）；

（2）对于所有的 $w \in W_1$ 和 Σ 中所有的命题字母 p，$w \in V_1(p)$，当且仅当，$g(w) \in V_2(p)$；

（3）对于所有的 $w \in W_1$ 和所有使得 $L\varphi \in \Sigma$ 的模态公式 φ，若 $\mathbf{M}_1 \models L\varphi[w]$，则 $\mathbf{M}_2 \models L\varphi[g(w)]$。

引理 2.30（过滤引理）　如果 g 是从 $\mathbf{M}_1$ 到 $\mathbf{M}_2$ 上的、相对于 Σ 的一个过滤，那么对于所有的 $w \in W_1$ 和所有的模态公式 $\varphi \in \Sigma$，

$$\mathbf{M}_1 \models \varphi[w]\text{，当且仅当，}\mathbf{M}_2 \models \varphi[g(w)]\text{。}$$

典型的例子是一个模型 $\mathbf{M}$（$=\langle W, R, V\rangle$）相对于一个对构成子公式封闭的模态公式集 Σ 的模态坍塌。它被定义为模型 $\langle W_\Sigma, R_\Sigma, V_\Sigma\rangle$，这里 $g(w)=\{\varphi \in \Sigma \mid \mathbf{M} \models \varphi[w]\}$，$W_\Sigma = g[W]$，$R_\Sigma g(w)g(v)$ 仅当对于所有使得 $L\varphi \in \Sigma$ 的模态公式 φ 有 $L\varphi \in g(w) \Rightarrow \varphi \in g(v)$，对所有出现于 Σ 中的命题字母 p（其他的都是无关的）有 $V_\Sigma(p) = \{g(w) \mid p \in g(w)\}$。显然，这里所定义的映射 g 是从 $\mathbf{M}$ 到它的模态坍塌上的一个过滤。

$\mathbf{M}$ 相对于 Σ 的模态坍塌有时被称为 $\mathbf{M}$ 相对于 Σ 的*最大过滤*。这样称呼它的理由就在于，如果 g' 是从 $\mathbf{M}$ 到一个以 W_Σ 为个体域的模型 $\mathbf{M}'$ 上的、相对于 Σ 的一个过滤，那么对于所有的 w，$v \in W$，有 $R'g(w)g(v)$ 蕴涵 $R_\Sigma g(w)g(v)$。$\mathbf{M}$ 还有一个相对于 Σ 的*最小过滤*，W_Σ 和 V_Σ 都如上定义，但它的关系 R_S 定义是：如果存在 w_1，$v_1 \in W$，满足 $g(w_1) = g(w)$ 和 $g(v_1) = g(v)$，则 Rw_1v_1，那么 $R_Sg(w)g(v)$。容易验证，如果 g' 是从 $\mathbf{M}$ 到一个以 W_Σ 为个体域的模型 $\mathbf{M}'$ 上的、相对于 Σ 的过滤，那么对于所有的 w，$v \in W$，若 $R_Sg(w)g(v)$，则 $R'g(w)g(v)$。

所有过滤都是同态，但它们不一定都是 p-态射（对此显然有反例）。不过，在若干重要的情形中，过滤就是 p-态射。例如，当 Σ 是由全部公式所组成的集合并且关于 Σ 的模态坍塌为*有穷的*时，坍塌映射是一个 p-态射（要明白这一点请注意，在这一情形下，模态坍塌中的任意一个元素是由单独一个模态公式来定义的）。这一主题将不在这里讨论。

过滤技术在模态完全性理论中有许多应用[67]。这里只提出两个应用，二者都由用不同手段得到的已有结果的新证明组成。

引理 2.22 蕴涵着，任意一个并非普遍有效的模态公式都在某个有穷模型上为假。这可以很迅速地得到证明。如果 φ 不是普遍有效的，那么对某个框架 $\mathbf{F}$、某个 $w \in W$ 和 $\mathbf{F}$ 上的某个赋值 V，$\langle \mathbf{F}, V\rangle \models \neg\varphi[w]$。$\langle \mathbf{F}, V\rangle$ 相对于由 $\neg\varphi$ 及其所有子公式组成的有穷集 Σ 的模态坍塌就产生一个*有穷*模型 $\mathbf{M}$，φ 在此模型中为假。这一性质被称为*有穷模型性*。它蕴涵着，由所有并非普遍有效的模态公式所组成的集是递归可枚举的（在有穷模型中搜寻会最终得到公式的全部）。于是很

容易明白，由所有普遍有效的模态公式所组成的集也是递归可枚举的（参看第3章和第5章）。因此，据波斯特定理可知，模态公式的普遍有效性是一个递归概念。

推论 2.31 由所有普遍有效的模态公式所组成的集是递归的。

过滤的第二个应用是关于前面提到的公式$\forall x \exists y(Rxy \wedge Ryy)$。有一个复杂的证明（利用超滤扩充的）表明没有一个模态公式能定义它。而借助过滤，易得此结果之初等证明。假定某个模态公式集Δ定义$\forall x \exists y(Rxy \wedge Ryy)$。由于这公式在$\langle IN, <\rangle$中不成立，故而有某个$\varphi \in \Delta$使得对某个赋值$V$和$n \in IN$，$\langle IN, <, V\rangle \models \neg\varphi[w]$。令$\Sigma$是由$\neg\varphi$及其所有子公式组成的有穷集。定义一个从$\langle IN, <, V\rangle$到一个使$\varphi$为假的有穷模型$\mathbf{M}_1 = \langle W_1, R_1, V_1\rangle$的过滤$g$如下：

$$g(n) = \{\varphi \in \Sigma \mid \langle IN, <, V\rangle \models \varphi[n]\};$$

$$W_1 = g[IN];$$

对各个使得$L\varphi \in \Sigma$的公式φ，若$L\varphi \in g(m)$则$L\varphi$和φ都在$g(n)$中，那么$R_1 g(m) g(n)$；

对任意一个命题字母$p \in \Sigma$而言，$V_1(p) = \{g(m) \mid p \in g(m)\}$。

（R_1的这一选择产生一种相对于Σ的模态坍塌，常常被称为莱蒙过滤）那个g为相对于Σ的一个过滤，这一事实由$<$为传递关系得出。此外也很容易看出，R_1是传递的。R_1还满足$\forall x \exists y Rxy$，因为$<$满足这条件并且g（因是一个同态而）传送了它。但是，任意一个满足$\forall x \forall y(Rxy \to \forall z(Ryz \to Rxz))$和$\forall x \exists y Rxy$两条件的有穷框架也满足$\forall x \exists y(Rxy \wedge Ryy)$。由此可知，$\Delta$应当在$\langle W_1, R_1\rangle$中成立，矛盾于$\varphi \in \Delta$于此为假的事实。 ■

莱蒙过滤表现了过滤技术的一个重要特征。我们常常试图按下述方式来定义（坍塌中的）那个关系R：保留了原来关系的某些所需要的性质（在我们的情形中是传递性）。

关于过滤的最后一个重要应用，见（引言中提到的）《哲学逻辑手册》中“对应理论”那一章。在那里，引进了框架之间的模态等值的概念，意指它们有相同的模态理论。我们可以通过把模态“反例”从一个框架过渡到另一个框架、先“过滤”然后“嵌入”来证明这样的等值。模态等值筛选的研究告诉我们许多有关模态语言表达能力的东西。对于某些特殊情形，如良序框架，在此期间已经找到了完全的分类［粗略地讲就是，模态逻辑只承认可数序型$\omega \cdot n + k$、$\omega \cdot \omega + k(k, n \in \omega)$］。

余下要定义的是上述讨论导致的语义后承概念。存在有两个这样的概念，二者都分别划分成一个局部的和一个全局的。

定义 2.32 对于一个模态公式集Σ和一个模态公式φ而言，

$\Sigma \models_f \varphi$，是指对于所有的框架 $\mathbf{F}$，若 $\mathbf{F} \models \Sigma$，则 $\mathbf{F} \models \varphi$（全局后承）；

$\Sigma \models_{f,l} \varphi$，是指对于所有的框架 $\mathbf{F}$ 和 $w \in W$，若 $\mathbf{F} \models \Sigma[w]$，则 $\mathbf{F} \models \varphi[w]$（局部后承）；

$\Sigma \models_m \varphi$，是指对于所有的模型 $\mathbf{M}$，若 $\mathbf{M} \models \Sigma$，则 $\mathbf{M} \models \varphi$；

$\Sigma \models_{m,l} \varphi$，是指对于所有的模型 $\mathbf{M}$ 和 $w \in W$，若 $\mathbf{M} \models \Sigma[w]$，则 $\mathbf{M} \models \varphi[w]$。

从我们的观点来看全局后承比较自然。不过，假如框架这一基本概念取为带有一个特指的世界 w 的框架 $\langle \mathbf{F}, w \rangle$（如克里普克最初发表的论文中那样），那么局部后承还是较为合宜的。幸好，这两个概念很容易比较。令 $L(\Sigma)$ 是集合 $\{L^i\varphi \mid \varphi \in \Sigma, i \geqslant 0\}$。

引理 2.33　对任意模态公式集 Σ 和任意模态公式 φ，

$$\Sigma \models_f \varphi，当且仅当，L(\Sigma) \models_{f,l} \varphi；$$
$$\Sigma \models_m \varphi，当且仅当，L(\Sigma) \models_{m,l} \varphi。$$

证明：利用引理 2.11。■

因此，我们的注意力将集中在全局后承。很容易证得，$\Sigma \models_m \varphi$ 蕴涵 $\Sigma \models_f \varphi$。不过，此蕴涵之逆不成立。例如，$\{p\} \models_f \bot$ 而 $\{p\} \not\models_m \bot$。在第 6 章中将会看到，对 $\models_m$ 而言，存在完全性定理，而对 $\models_f$ 而言不存在这样的结果，从第 1 章提到的托马森的结果看来：$\models_f$ “太强”。

注意，局部和全局这两种说法之间的区别也出现在标准逻辑中。在那里定义 $\Sigma \models \varphi$ 时，我们可以在“局部”和“全部”之间作选择，前者定义为“对于所有的结构 $\mathbf{D}$ 和所有的指派 b，$\mathbf{D} \models \Sigma[b]$ 蕴涵 $\mathbf{D} \models \varphi[b]$”，后者定义为“对于所有的结构 $\mathbf{D}$，若对于所有的指派 b 有 $\mathbf{D} \models \Sigma[b]$，则对于所有的指派 b 有 $\mathbf{D} \models \varphi[b]$”。这一术语不同于数学中的做法，在数学中局部说法强于全局说法。

3 可定义性

当在模型中解释模态公式时，如定义 2.1 中那样，它们等值于一种特殊的一阶公式。这一点从下述把模态公式 φ 变成含有一个自由变项的 L_1-公式 $ST(\varphi)$ 的翻译来看，将会更清楚。

定义 3.1 令 x 是一个固定的个体变项。

(i) $ST(p) = Px$;

(ii) $ST(\neg\psi) = \neg ST(\psi)$;

(iii) $ST(\psi \wedge \chi) = ST(\psi) \wedge ST(\chi)$;

(iv) $ST(L\psi) = \forall y(Rxy \rightarrow [y/x]\ ST(\psi))$;

这里 y 是（全部个体变项的某个固定的枚举中）第一个不在 $ST(\psi)$ 中出现的个体变项。例如：

$$ST(Lp \rightarrow p) = \forall y(Rxy \rightarrow Py) \rightarrow Px$$

$$ST(Lp \rightarrow LLp) = \forall y(Rxy \rightarrow Py) \rightarrow \forall y(Rxy \rightarrow \forall z(Ryz \rightarrow Pz))$$

可以附加一些补充性（但是多余的）的条款，例如：

(v) $ST(M\psi) = \exists y(Rxy \wedge [y/x]ST(\psi))$。

由于模型也是 L_1 - 结构，故而有一个明显的等价成立：

$\mathbf{M} \models \varphi[w]$，当且仅当，$\mathbf{M} \models ST(\varphi)[w]$（这里为 x 指派 w）;

$\mathbf{M} \models \varphi$，当且仅当，$\mathbf{M} \models \forall x ST(\varphi)$。

利用这个等价，有关 L_1 的一些熟知的结果就可应用于模态公式。例如，我们立即就可得到下面的一些定理：就模型而言的骆文汉姆 - 斯科伦定理、（就$\models_m$而言的）紧致性定理和（在由所有普遍有效公式所组成的集是递归可公理化的意义下的）完全性定理。

然而在框架中解释模态公式时，它们就变成（L_2 中的）二阶公式。如果模态公式 φ 含有命题字母 p_1，…，p_n，那么下述等价成立：

$$\mathbf{F} \models \varphi[w] \text{ 当且仅当 } \mathbf{F} \models \forall P_1 \cdots \forall P_n ST(\varphi)[w],$$
$$\mathbf{F} \models \varphi \text{ 当且仅当 } \mathbf{F} \models \forall x \forall P_1 \cdots \forall P_n ST(\varphi),$$
$$\text{当且仅当 } \mathbf{F} \models \forall P_1 \cdots \forall P_n \forall x ST(\varphi)。$$

就框架而言，骆文汉姆 - 斯科伦定理不成立：在论文［78］中托马森给出了一个不可数框架的实例，使得没有一个可数框架能满足条件 $Th_{mod}(\mathbf{F}) = Th_{mod}(\mathbf{F}')$。紧致性定理也不成立：同样是这位托马森，他在论文［76］中给出了模态公式集 Σ 及模态公式 φ 的实例使得 $\Sigma \models_f \varphi$，但是没有一个有穷的 $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ 能满足 $\Sigma_0 \models_f \varphi$。后一结果可由二阶逻辑到模态逻辑的托马森归约（参看第 1 章）与二阶逻辑的不紧致性相结合而得。此外，虽然普遍有效性是一个递归可公理化的概念（如上所说），但模态后承关系 $\models_f$（即使在单个模态公式之间也）不是递归可公理化的，正如第 1 章中所示。

现在将讨论作为（一阶）L_1-公式的模态公式。在本章的后面部分，讨论重点将移到作为（二阶）L_2-公式的模态公式。

对于形如 $ST(\varphi)$（就模态的 φ 而言）的 L_1-公式，存在有一个较为优美的、独立的描述方法。

定义 3.2　一个 m-公式是指满足下述条件的、最小的 L_1-公式类 X 的一个成员：

（i）对各个一元谓词常项 P 和各个个体变项 x，$Px \in X$；

（ii）若 $\alpha \in X$，则 $\neg\alpha \in X$；

（iii）若 $\alpha \in X$ 且 $\beta \in X$，则 $(\alpha \wedge \beta) \in X$；

（iv）若 $\alpha \in X$ 且 x，y 是不相同的个体变项，则 $\forall y(Rxy \to \alpha) \in X$。

因此，m-公式就是从一元原子公式利用布尔算子和受限的全称量化式构造起来的公式。模态公式的翻译属于一个带有更多限制的类。

定义 3.3　一个 M-公式是指满足下述条件的、最小的 L_1-公式类 X 的一个成员：

（i）对各个一元谓词常项 P 和各个个体变项 x，$Px \in X$；

（ii）若 $\alpha \in X$，则 $\neg\alpha \in X$；

（iii）若 α 和 β 有相同的自由个体变项并且都在 X 中，则 $(\alpha \wedge \beta) \in X$；

（iv）若 $\alpha \in X$ 且 y 是 α 的那个自由个体变项，则 $\forall y(Rxy \to \alpha) \in X$，只要 x 不同于 y。

m-公式至少有一个自由变项，M-公式恰好有一个自由变项。

引理 3.4　任意一个 m-公式 α 等值于 M-公式的一个布尔组合，这些 M-公式的自由变项都在 α 所有的自由变项之中。

证明：此断言的证明是施归纳于 m-公式的复杂度上进行的。为了简化证明，

上述定义改变如下。增加一条关于析取（∨）的条款，并把关于受限的全称量化式的条款换成关于受限的特称量化式的条款。这样的改变是无害的，因为我们只想要证明一个等价式。

$\alpha = Px$，$\alpha = \neg\beta$，$\alpha = \beta \wedge \gamma$ 和 $\alpha = \beta \vee \gamma$ 等情形是不足道的。余下要考虑的是 $\alpha = \exists y(Rxy \wedge \beta)$ 的情形。据归纳假设，β 等值于 M-公式的一个布尔组合，这些 M-公式各自的自由变项都在 β 所有的自由变项之中。据分配范式定理，β 又等值于形如 $\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n_i}\beta_{ij}$ 的一个公式，这里各个 β_{ij}是一个 M-公式（至于记法，相关的规定是 $\sum_{i=1}^{n}\varphi_i =_{def}(\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n)$ 和 $\prod_{i=1}^{n}\varphi_i =_{def}(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)$）。

据标准逻辑，$\exists y(Rxy \wedge \sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n_i}\beta_{ij})$ 等值于 $\sum_{i=1}^{n}\exists y(Rxy \wedge \prod_{j=1}^{n_i}\beta_{ij})$。所以，只需考虑这个析取式的各个析取支。如果诸 β_{ij} 中没有一个有自由变项 y，则 $\exists y(Rxy \wedge \prod_{j=1}^{n_i}\beta_{ij})$ 等值于 $\exists y(Rxy \wedge (Py \vee \neg Py)) \wedge \prod_{j=1}^{n_i}\beta_{ij}$，这里 P 是任意取定的一个一元谓词常项。这正是所要求的那种 M-公式的一个布尔组合。否则，令 β_i^1 为所有以 y 为自由变项的 β_{ij}的合取，并令 β_i^2 为其余那些 β_{ij}的合取。那么 $\exists y(Rxy \wedge \prod_{j=1}^{n_i}\beta_{ij})$ 等值于 $\exists y(Rxy \wedge \beta_i^1) \wedge \beta_i^2$，也是所要求的那种 M-公式的一个布尔组合。 ■

推论 3.5 任意一个带一个自由变项的 m-公式等值于一个 M-公式。

证明：带同一个自由变项的 M-公式的布尔组合本身仍是一个 M-公式。 ■

m-公式是模态公式的明显的推广。注意，据引理 3.4，各个 m-公式 α 等值于 M-公式 α_{ij} 的析取 $\alpha_i = \sum_{j=1}^{n_i}\alpha_{ij}$ 的一个合取 $\prod_{i=1}^{n}\alpha_i$。在许多情形中，我们仅感兴趣于这一类公式的全称闭包（参看"$\mathbf{M} \models \varphi$"的定义）。现在，$\alpha$ 的全称闭包 $\bar{\alpha}$ 等值于 $\prod_{i=1}^{n}\bar{\alpha}_i$，并且，由于 α_i 可被认为是由 M-公式 α_{ij}（各自带一个不同的自由变项）组成的，故而 $\bar{\alpha}$ 等值于 $\sum_{j=1}^{n_i}\alpha_{ij}$ [①]。因此，在这一情形下，又是模态公式（的闭包）起了重要作用。

下一个结果是依据对生成子模型和 p-关系的不变性而作的（作为所有 L_1-公式的一个子集的）m-公式的一个语义刻画。据推论 3.5，这个语义刻画同样也产生了"模态公式"在 L_1 中的一个刻画。相关的定义如下。

至于"生成子模型"的概念，请参看定义 2.10。

定义 3.6 称一个带自由变项 x_1，…，x_n 的 L_1-公式 φ 为对生成子模型不变

---

① 此处的 $\sum_{j=1}^{n_i}\alpha_{ij}$ 原文为 $\sum_{j=1}^{n_i}\bar{\alpha}i$，原文有误——译者注。

的，如果对于所有的满足 $\mathbf{M}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathbf{M}_2$ 的模型 $\mathbf{M}_1$ 和 $\mathbf{M}_2$，以及对于所有的 $w_1, \cdots, w_n \in W_1$，$\mathbf{M}_1 \models \varphi[w_1, \cdots, w_n]$，当且仅当，$\mathbf{M}_2 \models \varphi[w_1, \cdots, w_n]$。

定义 3.7　C 为 $\mathbf{M}_1 = \langle W_1, R_1, V_1 \rangle$ 和 $\mathbf{M}_2 = \langle W_2, R_2, V_2 \rangle$ 之间的一个 p-关系，是指下述四个条件都得到满足：

（i）C 的定义域为 W_1 而值域为 W_2；

（ii）对满足 Cwv 的各个 $w \in W_1$ 和 $v \in W_2$，以及对各个一元谓词常项 P，$w \in V_1(P)$，当且仅当，$v \in V_2(P)$；

（iii）对满足 R_1ww' 和 Cwv 的各个 w，$w' \in W_1$ 和 $v \in W_2$，存在有一个 $v' \in W_2$ 满足 R_2vv' 和 $Cw'v'$；

（iv）对满足 R_2vv' 和 Cwv 的各个 v，$v' \in W_2$ 和 $w \in W_1$，存在有一个 $w' \in W_1$ 满足 R_1ww' 和 $Cw'v'$。

定义 3.8　称一个带自由变项 $x_1, \cdots, x_n$ 的 L_1-公式 φ 为对 p-关系不变的，如果对于所有的模型 $\mathbf{M}_1$ 和 $\mathbf{M}_2$、$\mathbf{M}_1$ 和 $\mathbf{M}_2$ 之间的所有 p-关系以及满足 Cw_1w_1'，$\cdots$，Cw_nw_n' 的所有 $w_1, \cdots, w_n \in W_1$、$w_1', \cdots, w_n' \in W_2$，$\mathbf{M}_1 \models \varphi[w_1, \cdots, w_n]$，当且仅当，$\mathbf{M}_2 \models \varphi[w_1', \cdots, w_n']$。

这些概念仅对带自由变项的公式才有意思。一个对生成子模型不变的 L_1-语句或是普遍有效的，或是一个矛盾式，正如利用第 2 章中的方法所容易看到的那样。

定理 3.9　一个至少含有一个自由变项的 L_1-公式 φ 等值于一个 m-公式，当且仅当，它对生成子模型和 p-关系都不变。

证明：有一个方向是容易证明的。各个 m-公式对生成子模型和 p-关系都不变，简单地施归纳于公式即可证明。

另一方面，令 φ 具这个性质并令 φ 所有的自由变项为 $x_1, \cdots, x_n$。定义 $\mathbf{m}(\varphi) = \{\psi \mid \psi$ 是 m-公式，$\varphi \models \psi$，并且 ψ 所有的自由变项都在 $x_1, \cdots, x_n$ 之间$\}$。我们将证明，$\mathbf{m}(\varphi) \models \psi$。据紧致性定理，这个结论意味着对某个 $\psi \in \mathbf{m}(\varphi)$，$\psi \models \varphi$。由此，显然有 $\models \varphi \leftrightarrow \psi$。由于这个证明要用到在第 15 章中不同地方重复出现的一种构造，故而我们在下面对其做更详细地介绍。

令 $\mathbf{M}_1 \models \mathbf{m}(\varphi)[w_1, \cdots, w_n]$，引进个体常项 $\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_n$（记号 $\mathbf{w}$ 被一致地用于为一个对象 w 引进一个唯一的个体常项）。附加 $\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_n$ 到 L_1 中得到一个语言 L_{11}。然后通过用 w_1 解释 $\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_n$ 解释 $\mathbf{w}_n$ 使 $\mathbf{M}_1$ 膨胀成一个 L_{11}-模型 $\mathbf{M}_{11}$。令 φ^* 是 φ 经 $\mathbf{w}_1$ 代入 $x_1, \cdots, \mathbf{w}_n$ 代入 x_n 后所产生的结果。

定义 $m(L_{11})$ 为由 L_{11} 中所有按下述方式得到的那些语句（!）所组成的类：从形如 Px 或 Pc 的原子公式开始并应用$\neg$、$\wedge$、$\forall y(Rxy \rightarrow$、或者 $\forall y(Rcy \rightarrow$ 而

得，这里 x 和 y 是不同的个体常项，并且 c 是任取的一个 L_{11} 中的个体常项（m-公式总是至少有一个自由变项，但这样放宽定义仍然生成语句）。

$\{\varphi^*\}\cup\{\psi\mid\psi\in m(L_{11})$，且 $\mathbf{M}_{11}\models\psi\}$ 的各个有穷子集都有模型。因为，假定不是如此，则对如所描述的某些 ψ_1，…，ψ_k，$\varphi^*\models\neg(\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_k)$。但是，由于 $\mathbf{M}_1\models m(\varphi)[w_1,\cdots,w_n]$，故而可得 $\mathbf{M}_{11}\models\neg(\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_k)$，矛盾于 $\mathbf{M}_{11}\models\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_n$。因此，存在一个 $\mathbf{N}_{11}$ 为整个集的模型。$\mathbf{N}_{11}$ 是满足下述两条件的一个 L_{11}-模型：

（i）$\mathbf{N}_{11}\models\varphi^*$；

（ii）$\mathbf{N}_{11}-m(L_{11})-\mathbf{M}_{11}$。

这里，（ii）是“对各个 $\varphi\in m(L_{11})$，$\mathbf{N}_{11}\models\varphi$，当且仅当，$\mathbf{M}_{11}\models\varphi$”的一个缩写。

对于满足 c 为 L_{11} 中个体常项、w 为 $\mathbf{N}_{11}$ 的个体域中元素且 $\mathbf{N}_{11}\models Rcx[w]$ 的各个 c 和 w，附加一个新常项 k_{cw} 到 L_{11} 中得到 L_2。然后通过将各个 k_{cw} 解释为 w 使 $\mathbf{N}_{11}$ 膨胀成一个 L_2-模型 $\mathbf{N}_2$。$m(L_2)$ 的定义类上而作。

$\{\psi\mid\psi\in m(L_2)$ 且 $\mathbf{N}_2\models\psi\}\cup\{Rck_{cw}\mid\mathbf{N}_2\models Rck_{cw}\}$ 的各个有穷子集都有一个为 $\mathbf{M}_{11}$ 的膨胀的模型。为了证明这一点，考虑如所描述的 ψ_1，…，ψ_k，以及 $Rc_1k_{c_1w_1}$，…，$Rc_lk_{c_lw_l}$。为在 $\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_k$ 中出现而又不在 $k_{c_1w_1}$，…，$k_{c_lw_l}$ 之中的各个 k_{cw} 附加一个 Rck_{cw}，不妨设这样的 Rck_{cw} 为 $k_{c'_1w'_1}$，…，$k_{c'_sw'_s}$。然后取不在 $\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_k$ 中出现的、不相同的变项 x_1，…，x_l，y_1，…，y_s，并用它们分别替代 $k_{c_1w_1}$，…，$k_{c_lw_l}$，$k_{c'_1w'_1}$，…，$k_{c'_sw'_s}$，得到 $(\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_k)'$。于是有，$\mathbf{N}_{11}\models\exists x_1\ (Rc_1x_1\wedge\cdots\wedge\exists x_l(Rc_lx_l\wedge\exists y_1(Rc'_1y_1\wedge\cdots\wedge\exists y_s(Rc'_sy_s\wedge(\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_k)'\cdots)$。这个语句在 $m(L_{11})$ 中，因为有 $\mathbf{N}_{11}-m(L_{11})-\mathbf{M}_{11}$，因此它也在 $\mathbf{M}_{11}$ 中成立。现在很清楚，$\mathbf{M}_{11}$ 是如何膨胀成 $\{\psi_1,\cdots,\psi_k,Rc_1k_{c_1w_1},\cdots,Rc_lk_{c_lw_l}\}$ 的一个模型的。

引用一个熟知的模型论论证，由此可知上述集合有一个满足下述条件的模型 $\mathbf{M}_2$：

（i）$\mathbf{M}_{11}\prec_{L11}\mathbf{M}_2$（即 $\mathbf{M}_{11}$ 是 $\mathbf{M}_2$ 的一个 L_{11}-初等子模型）；

（ii）$\mathbf{N}_2-m\ (L_2)-\mathbf{M}_2$。

这里，（ii）中的记号意义类上。整个情形见图 3-1

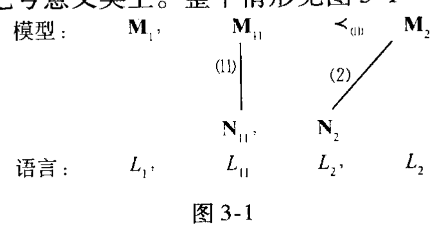


图 3-1

重复这一过程，但现在从 $\mathbf{M}_2$ 开始。对于满足 c 为 L_2 中常项、w 为 $\mathbf{M}_2$ 的个体域中元素并且 $\mathbf{M}_2 \models Rcx[w]$ 的各个 c 和 w，附加一个新常项 k_{cw} 到 L_2 使之成为 L_{21}，然后将各个 k_{cw} 解释为 w 使 $\mathbf{M}_2$ 膨胀成一个 L_{21}-模型 $\mathbf{M}_{21}$。利用一个如上给出的论证，我们可以看到，$\{\psi \mid \psi \in m(L_{21})$ 且 $\mathbf{M}_{21} \models \psi\} \cup \{Rck_{cw} \mid k_{cw} \in L_{21} - L_2$ 且 $\mathbf{M}_{21} \models Rck_{cw}\}$ 的各个有穷子集都有一个为 $\mathbf{N}_2$ 的膨胀的模型。因此，这个集合有一个满足下述两条件的模型 $\mathbf{N}_{21}$：

(i) $\mathbf{N}_2 \prec_{L_2} \mathbf{N}_{21}$；

(ii) $\mathbf{N}_{21} - m(L_{21}) - \mathbf{M}_{21}$。

用图 3-2 来表示，这就成了如下形式：

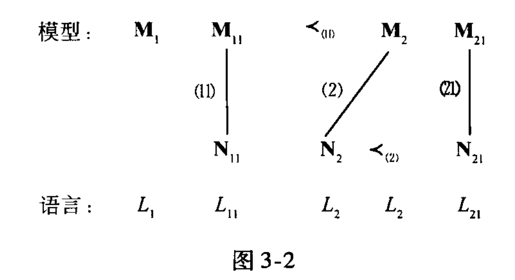


图 3-2

这个过程继续迭代下去就产生两条初等链 $\mathbf{M}_1$，$\mathbf{M}_2$，…和 $\mathbf{N}_1$，$\mathbf{N}_2$，…，分别以 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{N}$ 为极限。而且，这一过程创造的全部语言中所有有解释的常项在两侧形成两个特殊的子模型（通过上述 Rck_{cw}-公式，R-后继对象之间的锯齿型联系逐步构造起来）。所要求的结论则可以从对 φ 的假定和初等链的基本定理得出。首先，由于 $\mathbf{N}_{11} \models \varphi^*$，故而 $\mathbf{N} \models \varphi^*$。由 $\bigcup_n L_n$ 中所有常项产生的 $\mathbf{N}$ 的子模型 $\mathbf{N}_c$ 是 $\mathbf{N}$ 的一个生成子模型，并且，因此而由 φ 对生成子模型不变可得，$\mathbf{N}_c \models \varphi^*$。命由 $\bigcup_n L_n$ 中所有常项生成的、$\mathbf{M}$ 的生成子模型为 $\mathbf{M}_c$，现在定义 $\mathbf{N}_c$ 和 $\mathbf{M}_c$ 之间的一个 p-关系 C 如次：Cwv 成立是指对某个常项 $c \in \bigcup_n L_n$，$w = c^{\mathbf{M}}$ 和 $v = c^{\mathbf{N}}$。两条链的构成过程保证 C 满足 p-关系所要求的四个条件。据 φ 对 p-关系不变可得，$\mathbf{M}_c \models \varphi^*$，并且，再次利用 φ 对生成子模型不变又可得，$\mathbf{M} \models \varphi^*$。这意味着 $\mathbf{M}_{11} \models \varphi^*$，所以 $\mathbf{M}_1 \models \varphi[w_1, \cdots, w_n]$。 ■

证明中用常项 k_{cw} 而不直接用 w 是为了避免下面的麻烦。令 c_1 和 c_2 为 L_{11} 中的常项，并令 $\mathbf{N}_2 \models Rc_1x[w]$，且 $\mathbf{N}_2 \models Rc_2x[w]$。则 $\{Rc_1w, Rc_2w\}$ 不一定有一个为 $\mathbf{M}_{11}$ 的膨胀的模型［所用的方法仅产生 L_{11}-语句 $\exists x_1(Rc_1x_1 \wedge Rc_2x_1)$，但这不是 $m(L_{11})$ 中的语句，因此不必在 $\mathbf{M}_{11}$ 中为真］。如果使用 Rc_1w，Rc_2w，虽然得到 $m(L_{11})$ 句子 $\exists x_1(Rc_1x_1 \wedge \exists x_2Rc_2x_2)$，但此语句遗漏了 c_1 和 c_2 共有一个 R-后

继的信息。

关于作为 L_1-公式的模态公式的讨论部分至此结束。我们现在已获得有趣的认识，即模态公式可以看做是 L_2-公式，即作为表达择代关系的（二阶）性质的工具。不过，上述使模态公式 φ 与 L_2-公式 $\forall P_1 \cdots \forall P_n ST(\varphi)$ 相联系的对应没有给我们提供多少信息。在许多情形中，可以找到较简单的等价物，甚至常常是一阶性质（即 L_0-公式）。下面看几个例子，大家就会有这样的感觉。

对于所有的 $\mathbf{F}(=\langle W, R\rangle)$ 和所有的 $w \in W$ 有：

（1）$\mathbf{F} \models L\bot[w]$，当且仅当，$\mathbf{F} \models \neg \exists y Rxy[w]$

（2）$\mathbf{F} \models M\top[w]$，当且仅当，$\mathbf{F} \models \exists y Rxy[w]$

（3）$\mathbf{F} \models ML\bot[w]$，当且仅当，$\mathbf{F} \models \exists y(Rxy \wedge \neg \exists z Ryz)[w]$

（在这最初三个例子中，赋值根本不起作用）

（4）$\mathbf{F} \models Lp \to p[w]$，当且仅当，$\mathbf{F} \models Rxx[w]$

（5）$\mathbf{F} \models Lp \to LLp[w]$，当且仅当，$\mathbf{F} \models \forall y(Rxy \to \forall z(Ryz \to Rxz))[w]$

（6）$\mathbf{F} \models MLp \to p[w]$，当且仅当，$\mathbf{F} \models \forall y(Rxy \to Ryx)[w]$。

此外，最后有一个例子表明等词也同样是必须有的：

（7）$\mathbf{F} \models p \to Lp[w]$，当且仅当，$\mathbf{F} \models \forall y(Rxy \to y = x)[w]$。

这七个等价命题的证明可在第 9 章中找到。

有些读者习惯于下述的等价命题：

（4）′ $F \models Lp \to p[w]$，当且仅当，$\mathbf{F} \models \forall x Rxx[w]$。

我们较喜欢这里所给的“参数化”形式，因为它比较自然（正如第 9 章中显现的那样）并且也因为它信息较多，强于第二种表述（正如第 7 章中显现的那样）。

为了对如何证明这些等价命题有一个初步的观念，$CF = L((Lp \wedge p) \to q) \vee L(Lq \to p)$ 将可当做一个不太平庸的例子来用：

（8）$\mathbf{F} \models CF[w]$，当且仅当，$\mathbf{F} \models \forall y(Rxy \to \forall z(Rxz \to (Ryz \vee Rzy \vee z = y)))[w]$（即 CF 定义一种连通性）。

（8）的证明　从右至左：设所给的关系性质在 w 处成立。令 V 是 $\mathbf{F}$ 上的任意一个赋值。若 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models L((Lp \wedge p) \to q)[w]$，则没有什么要证明的，因此设 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \not\models L((Lp \wedge p) \to q)[w]$。这意味着，某个满足 Rwv 的 $v \in W$ 有 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \not\models (Lp \wedge p) \to q[v]$，即 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models Lp \wedge p[v]$，而 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \not\models q[v]$。于是，要证明的是 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models L(Lq \to p)[w]$。所以令 u 是任意一个满足 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models Lq[u]$、$w$ 的 R-后继。只需证明 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models p[u]$。至多有三种可能：或是 Rvu（由此 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models Lp[v]$，产生所要求的结论）或是 Ruv（这是不可能的，因为 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models Lq[u]$ 且 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \not\models q[v]$），或是 $u = v$（由此 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models p[v]$，也产生所要求的结论）。

从左至右：设所给的关系性质在 w 处不成立。这意指，有 u，v 使得 Rwv、Rwu、$\sim Rvu$、$\sim Ruv$ 以及 $u \neq v$。通过取 $V(p)=\{v\}\cup\{x\in W \mid Rvx\}$ 和 $V(q)=\{x\in W \mid Rux\}$ 来定义一个赋值 V。很易算出，$\langle \mathbf{F}, V\rangle \not\models L((Lp\wedge p)\rightarrow q)[v]$ 和 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \not\models Lq\rightarrow p[u]$，因而得 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \not\models CF[w]$。 ■

"洛伯公式" $L(Lp\rightarrow p)\rightarrow Lp$（$LF$，参看第 1 章）是不能用一个 L_0-公式来定义的模态原则的一个重要例子：

（9）$\mathbf{F}\models LF[w]$，当且仅当，（i）$\mathbf{F}\models \forall y(Rxy\rightarrow \forall z(Ryz\rightarrow Rxz))[w]$

并且，（ii）不存在 f：$IN\rightarrow W$ 使得 $f(0)=w$

且对各个 $n\in IN$ 有 $Rf(n)\ f(n+1)$。

（因此，$\mathbf{F}\models LF$，当且仅当，R 是传递的且 R 的逆关系是良基的）

（9）的证明　从左至右：要得到 LF 蕴涵传递性这一结论，最好是把 LF 看成 L_2-公式 $\forall P(\forall y(Rxy\rightarrow(\forall z(Ryz\rightarrow Pz)\rightarrow Py))\rightarrow \forall y(Rxy\rightarrow Py))$，然后用 L_0-公式 $Rxu\wedge \forall v(Ruv\rightarrow Rxv)$ 替代形如 Pu 的子公式。LF 蕴涵 R 的逆关系之良基性这一结论使用换质位法得到：设所禁止的 f 存在。定义 $V(p)=W-\{f(n)\mid n\in IN\}$。没有一个 $f(n)$ 使得 $\langle \mathbf{F}, V\rangle\models Lp[f(n)]$ 成立，但对所有不是 $f(n)$ 的 v，$\langle \mathbf{F}, V\rangle\models p[v]$。因此，$\langle \mathbf{F}, V\rangle\models L(Lp\rightarrow p)[f(0)]$，并且 $\langle \mathbf{F}, V\rangle\not\models Lp[f(0)]$：$LF$ 为假。

从右至左：假定对某个 V 和 w，$\langle \mathbf{F}, V\rangle\not\models LF[w]$（即 $\langle \mathbf{F}, V\rangle\models L(Lp\rightarrow p)[w]$，且 $\langle \mathbf{F}, V\rangle\not\models Lp[w]$），但（i）成立。所禁止的 f 可以如下构造出来。设 $f(0)=w$。于是，假定已经定义有 $f(n)$ 使得 $Rf(0)f(1)$，…，$Rf(n)\ f(n+1)$ 以及 $\langle \mathbf{F}, V\rangle\not\models Lp[f(n)]$ 都成立。这意味着，对某个满足 $Rf(n)v$ 的 $v\in W$ 使得 $\langle \mathbf{F}, V\rangle\not\models p[v]$。因为（i），$Rf(0)f(n)$ 成立，因而 $Rf(0)v$ 也成立。于是由 $\langle \mathbf{F}, V\rangle\models L(Lp\rightarrow p)[f(0)]$，从而有 $\langle \mathbf{F}, V\rangle\models Lp\rightarrow p[v]$，所以 $\langle \mathbf{F}, V\rangle\not\models Lp[v]$。设 $v=f(n+1)$。 ■

正如下面所表明的那样，R 的逆关系之良基性不是模态可定义的。

一个在许多方面的表现很像 LF 的公式是"达米特公理"的下述变种：$Dum=L(L(p\rightarrow Lp)\rightarrow p)\rightarrow p$。相关的等价命题这里不加证明地陈述于下：

（10）$\mathbf{F}\models Dum[w]$，当且仅当，（i）$\mathbf{F}\models Rxx[w]$，并且

（ii）$\mathbf{F}\models \forall y(Rxy\rightarrow \forall z(Ryz\rightarrow Rxz))[w]$

并且，（iii）不存在 f：$IN\rightarrow W$ 使得

$f(0)=w$，且对各个 $n\in IN$ 有 $Rf(n)f(n+1)$

且 $f(n)\neq f(n+1)$。

注意，给出了所有这些例子，我们也就为定义主要的概念做好了准备。

定义 3.10 对任意模态公式 φ 和任意带一个自由变项的 L_0-公式 α，

$E(\varphi, \alpha)$，当且仅当，$\forall \mathbf{F}(=\langle W, R\rangle)\forall w\in W(\mathbf{F}\models\varphi[w]\Leftrightarrow\mathbf{F}\models\alpha[w])$。

对任意模态公式 φ 和任意 L_0-语句 α，

$\bar{E}(\varphi, \alpha)$，当且仅当，$\forall \mathbf{F}(\mathbf{F}\models\varphi\Leftrightarrow\mathbf{F}\models\alpha)$，

$M_1=\{\varphi\mid$对某个 α，$E(\varphi, \alpha)\}$，

$\bar{M}_1=\{\varphi\mid$对某个 α，$\bar{E}(\varphi, \alpha)\}$（$=\{\varphi\mid FR(\varphi)$ 是 L_0-*初等的*$\}$），

$P_1=\{\alpha\mid$对某个 φ，$E(\varphi, \alpha)\}$，

$\bar{P}_1=\{\alpha\mid$对某个 φ，$\bar{E}(\varphi, \alpha)\}$。

E 是模态公式和 L_0-公式之间的*局部*等价关系，而 $\bar{E}(\varphi, \alpha)$ 则是*全局*等价关系。如果 $E(\varphi, \alpha)$，其中 α 有一个自由变项，那么 $\bar{E}(\varphi, \forall x\alpha)$。由此可知，$M_1\subseteq\bar{M}_1$ 且 $P_1\subseteq\bar{P}_1$。正如将在第 7 章中所表明的那样，前一个包含是真包含。至于后一个包含，那是一个未解决（而又不那么有意思）的问题。

在第 2 章的叙述中，我们已经看到若干不在 $\bar{P}_1$ 中的 L_0-语句，也就是 $\exists x\exists yRxy$，$\forall x\forall yRxy$，$\forall x\neg Rxx$ 以及 $\forall x\exists y(Rxy\wedge Ryy)$。这一信息必须等到第 14 章着手研究 P_1 和 $\bar{P}1$ 时才处理。现在，我们将只论述 M_1 和 $\bar{M}1$。

上述定义可以有两种方式来做推广。

首先，我们可以考虑由所有满足 φ 等值于某个 L_0-公式集的模态公式 φ 所组成的模态公式类。不过，这一方向上并没有什么收获。考虑最有意思的情形，设对某个 L_0-语句集 Σ 有 $FR(\varphi)=FR(\Sigma)$[即 $FR(\Sigma)$ 是 L_0-Δ 初等的]。这蕴涵着 $\Sigma\models\forall P_1\cdots\forall P_n\forall xST(\varphi)$，因而 $\Sigma\models\forall xST(\varphi)$。那么这里涉及的所有语句就都是 L_1-语句，因而据 L_1 的紧致性可知，存在某个有穷的 $\Sigma_0\subseteq\Sigma$ 使得 $\Sigma_0\models\forall xST(\varphi)$[从而有 $\Sigma_0\models\forall P_1\cdots\forall P_n\forall xST(\varphi)$]。很容易明白，$\Sigma_0$ 中所有公式的合取也定义 $FR(\varphi)$。实际上，我们只是碰到了下述一般性结果的一个特例而已：

对于任意全称二阶语句 φ，如果 φ 定义一个 Δ-初等结构类，那么它也定义一个初等结构类。

其次，我们可以考虑模态公式集而非单独一个模态公式。例如，令 $\Sigma\in\bar{M}_1$，仅当 $FR(\Sigma)$ 为 L_0-Δ-初等的（M_1 的定义作类似的推广）。此时不存在有像上面那样的归约，以下述取自［6］的例子为证。

令 $\Sigma=\{M^iL\bot\rightarrow L^iL\bot\mid i\geqslant 1\}$。各个 $M^iL\bot\rightarrow L^iL\bot$ 定义一个 L_0-性质，也就是，$\exists x_1(Rxx_1\wedge\cdots\wedge\exists x_i(Rx_{i-1}x_i\wedge\neg\exists yRx_iy))\rightarrow\forall x_1(Rxx_1\rightarrow\cdots\rightarrow\forall x_i(Rx_{i-1}x_i\rightarrow\neg\exists yRx_iy)\cdots)$。因此，$\Sigma$ 定义一个 L_0-Δ-初等框架类。但这个类不是 L_0-初等的。因为，假定它是 L_0-初等的，不妨设 L_0-语句 δ 定义了它。那么，据紧致性，δ 应当可从有穷多个形如 $M^iL\bot\rightarrow L^iL\bot$ 的公式推出，从而对某个 n 而言它可从

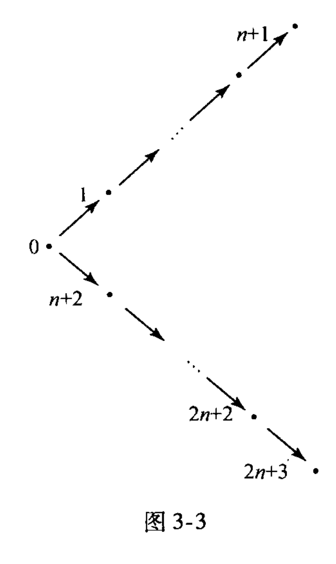


图 3-3

$\{M^iL\bot\to L^iL\bot \mid 1\leqslant i\leqslant n\}$ 推出。所以，这个集合将蕴涵着 $M^{n+1}L\bot\to L^{n+1}L\bot$，但它并不成立。要反驳这一点，考虑这样一个框架 $\mathbf{F}=\langle W, R\rangle$：$W=\{0,\cdots,2n+3\}$，并且 $R=\{\langle i, i+1\rangle \mid 0\leqslant i\leqslant n\}\cup\{\langle 0, n+2\rangle\}\cup\{\langle n+i, n+i+1\rangle \mid 2\leqslant i\leqslant n+2\}$，如图 3-3。

$\mathbf{F}\models M^{n+1}L\bot[0]$，但 $\mathbf{F}\not\models L^{n+1}L\bot[0]$，从而 $M^{n+1}L\bot\to L^{n+1}L\bot$ 在 $\mathbf{F}$ 中为假。不过，所有公式 $M^iL\bot\to L^iL\bot$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 在 $\mathbf{F}$ 中都成立，很容易验证这些结论。 ■

用模态公式集而不用单个模态公式有一些优点。例如，M_1 和 $\bar{M}_1$ 之间的区别就可忽略。

引理 3.11　对于任意一个对附加前缀 L 封闭的模态公式集 Σ，

$\Sigma\in M_1$，当且仅当，$\Sigma\in\bar{M}_1$。

证明：如果 $\Sigma\in M_1$，那么对于某个其中元素都有同一个自由变项（设为 x）的 L_0-公式集 Δ 而言，对于所有的 $\mathbf{F}$ 和 w 都有 $\mathbf{F}\models\Sigma[w]$，当且仅当，$\mathbf{F}\models\Delta[w]$。因此，对于所有的 $\mathbf{F}$，$\mathbf{F}\models\Sigma$，当且仅当，$\mathbf{F}\models\{\forall x\delta \mid \delta\in\Delta\}$，所以，$\Sigma\in\bar{M}_1$。

如果 $\Sigma\in\bar{M}_1$，那么对于某个 L_0-公式集 Δ 而言，对于所有的 $\mathbf{F}$ 都有 $\mathbf{F}\models\Sigma$，当且仅当，$\mathbf{F}\models\Delta$。据第 15 章中的保持性结果可知，Δ 对生成子框架和不相交并的保持（因为 Σ 如此）蕴涵着 Δ 可以用它所有形如 $\forall x\delta$ 的逻辑后承来公理化，这里 $\delta=\delta(x)$ 是一个受限公式（即一个其中出现的量词都形如 $\forall y(Rzy\to$ 或者 $\exists y(Rzy\wedge$ 的公式，y 不同于 z）。注意，受限公式在下述意义下对生成子框架不变：若 $\mathbf{F}_1\underset{\to}{\subseteq}\mathbf{F}_2$，且 $w\in W_1$，则 $\mathbf{F}_1\models\delta[w]$，当且仅当，$\mathbf{F}_2\models\delta[w]$（这可以利用一个类似于建立引理 2.11 的公式归纳来证）。现在可以证明，对于所有的 $\mathbf{F}$ 和 w，$\mathbf{F}\models\Sigma[w]$，当且仅当，$\mathbf{F}\models\Delta'[w]$。这里，$\Delta'=\{\delta \mid \delta$ 是受限公式且 $\Delta\models\forall x\delta\}$。

如果 $\mathbf{F}\models\Sigma[w]$，那么据推论 2.12 可知 $TC(\mathbf{F}, w)\models\Sigma[w]$，并且由 Σ 对加前缀 L 封闭可得 $TC(\mathbf{F}, w)\models\Sigma$。由关于 Σ 的所设得到结论 $TC(\mathbf{F}, w)\models\Delta$，从而 $TC(\mathbf{F}, w)\models\Delta'[w]$。由 Δ' 中公式都对生成子框架不变，可得 $\mathbf{F}\models\Delta'[w]$。

反过来，令 $\mathbf{F}\models\Delta'[w]$。像上面一样，由此推出 $TC(\mathbf{F}, w)\models\Delta'[w]$。但这蕴涵着 $TC(\mathbf{F}, w)\models\Delta$［而且，一旦确定了这一点，只需注意 $TC(\mathbf{F}, w)\models\Sigma$、$TC(\mathbf{F}, w)\models\Sigma[w]$、$\mathbf{F}\models\Sigma[w]$ 就够了］。要明白 $TC(\mathbf{F}, w)\models\Delta$，据上面关于 Δ 的说明可知，只需证明对任意 $\delta\in\Delta'$ 和 $TC(\mathbf{F}, w)$ 个体域中的 v 有 $TC(\mathbf{F}, w)$

$\models \delta[v]$。因此，令 v 由一长度为 n 的 R-链与 w 相连。由于 $\Delta \models \forall x\delta$，故而有

$$\Delta \models \forall x \forall y_1(Rxy_1 \to \cdots \to \forall y_n(Ry_{n-1}y_n \to \delta(y_n))\ \cdots);$$

记号 $\models$ 右面的公式将被缩写为 $\forall x \forall y(R^n xy \to \delta(y))$。这个公式是受限公式，因而属于 Δ'。所以，$TC(\mathbf{F},\ w) \models \forall y(R^n xy \to \delta(y))[w]$，并且很容易得到所要求的结论 $TC(\mathbf{F},\ w) \models \delta[v]$。 ■

在第5章中，模态逻辑将被定义为（尤其）对加前缀 L 封闭的模态公式集。由引理3.11可知，对模态逻辑而言，在局部一阶可定义性和全局一阶可定义性之间并无什么区别。

一般说来，$\bar{M}_1$ 倒是语义研究的一个较自然的对象（参看第8章），而 M_1 则是句法研究的一个较自然的对象（参看第9章）。再回想一下第2章末所作的说明：如果基本结构都取 $\langle \mathbf{F},\ w \rangle$ 的形式（w 是某个特指的世界），则 M_1 无论如何都是较自然的对象。

当模态公式类被看成为全体 L_2-公式的子类时，我们也对启发引理3.4和定理3.9那样的问题感兴趣。关于这方面句法结构的一个实例，请读者参阅推论2.9，推论证明了用→和 M 作初始逻辑符是充分的。不过，语义结果难以获得。一个有意思的猜测是（依据第2章中引进的概念），任意一个关于它的二阶量词都为全称的 L_2-语句等值于一个模态公式，当且仅当，它对生成子框架、不相交并和 p-态射保持，而它的否定对超滤扩充保持。但是，下属这个定义了 R 的逆关系之良基性的语句是一个反例，将如下文所示：

$$\forall P(\forall x(\forall y(Rxy \to Py) \to) \to Px) \to \forall x Px)。$$

[注意这样一个奇妙的事实：R 的逆关系之良基性跟 R 的传递性合起来是模态可定义的；即由洛伯公式 $L(Lp \to p) \to Lp$ 可定义的] 上述语句对子框架保持，因而它对生成子框架保持，并且它的否定对超滤扩充保持（利用引理2.27）。它对不相交并和 p-态射保持的结论也不难验证。于是，为了弄清它不是模态可定义的，我们假定模态公式集 Σ 定义这个语句。然后，考虑框架 $\langle IN,\ R \rangle$，这里 $R = \{\langle n,\ n+1 \rangle \mid n \in IN\}$。显然，$R$ 的逆关系不是良基的，因此对某个赋值 V，某个 $n \in IN$ 和某个 $\sigma \in \Sigma$，$\langle IN,\ R,\ V \rangle \models \neg\sigma[n]$。据引理2.23可知，这一模型的某个有穷子模型也使 σ 为假。但是，R 的逆关系在这样一个有穷模型上是良基的：矛盾。

在这一领域寻找保持结果的困难由下述事实得到了更进一步的说明：上述语句虽然在子框架下保持，但不可用形如

$$\forall P_1 \cdots \forall P_m \forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi$$

的全称二阶语句来定义。这里，$\varphi = \varphi(P_1,\ \cdots,\ P_m,\ R,\ =)$ 是一个无量词出现

的一阶公式（即熟知的、塔尔斯基关于子结构和全称语句的一阶保持性结果这里不成立）。理由就在于，良基性不可用 L_0-语句定义，但所述的那种全称二阶语句是可用 L_0-语句定义的。

引理 3.12　任意一个形如 $\forall P_1 \cdots \forall P_m \forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi$[这里 φ 是从 L_0-公式和形如 $P_i y_1 \cdots y_{ni}(1 \leqslant i \leqslant m)$ 的原子公式仅用布尔算子构造起来的一阶公式] 的二阶语句都对超积保持。

证明：对某个指标集 I 中的各个 i，令 $\mathbf{F}_i \models \forall P_1 \cdots \forall P_m \forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi$。令 U 是 I 上的任意一个超滤。将要证明的是，$\mathbf{F} = \prod_U \mathbf{F}_i \models \forall P_1 \cdots \forall P_m \forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi$。为了弄清这一点，令 Y_1，…，Y_m 是任意取定的 $\mathbf{F}$ 上的谓词，使得若 P_i 是 n_i 元的则 Y_i 是 n_i 元的 $(1 \leqslant i \leqslant m)$。此外，令 f_U^1，…，f_U^n 是任意取定的 W 中元素。要证明的就是，$\langle \mathbf{F}, Y_1, \cdots, Y_m \rangle \models \varphi[f_U^1, \cdots, f_U^n]$。现在，$\varphi$ 是 L_0-公式 α_1，…，α_s 和形如 $P_i y_1 \cdots y_{ni}$ 的原子公式（不妨设为 β_1，…，β_t）的一个布尔组合。我们将找出一个因子 $\mathbf{F}_i$ 使得

(i) 对各个 $j(1 \leqslant j \leqslant s)$，$\mathbf{F}_i \models \alpha_j[f^1(i), \cdots, f^n(i)]$，当且仅当，$\mathbf{F} \models \alpha_j[f_U{}^1, \cdots, f_U{}^n]$，并找出 $\mathbf{F}_i$ 上的谓词 $Y_m{}^1$，…，$Y_m{}^i$ 使得

(ii) 对各个 $k(1 \leqslant k \leqslant t)$，$\langle \mathbf{F}_i, Y_1^i, \cdots, Y_m{}^i \rangle \models \beta_k[f^1(i), \cdots, f^n(i)]$，当且仅当，$\langle \mathbf{F}, Y_1, \cdots, Y_m \rangle \models \beta_k[f_U^1, \cdots, f_U^n]$。

由于 $\mathbf{F}_i \models \forall P_1 \cdots \forall P_m \forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi$，故而将有

(iii) $\langle \mathbf{F}, Y_1^i \cdots, Y_m^i \rangle \models \varphi[f^1(i), \cdots, f^n(i)]$。

(i)、(ii) 和 (iii) 结合起来就产生结论 $\langle \mathbf{F}, Y_1, \cdots, Y_m \rangle \models \varphi[f_U^1, \cdots, f_U^n]$。

接着，寻找 $\mathbf{F}_i$。由沃斯（J. Z. Łos）的定理可知，$\mathbf{F} \models \alpha_j[f_U^1, \cdots, f_U^n]$，当且仅当，$\{i \in \mathrm{I} \mid \mathbf{F}_i \models \alpha_j[f^1(i), \cdots, f^n(i)]\} \in U$，并且对 $\neg \alpha_j$ 有同样的结论。取超滤中 s 个集合的适当的交集就产生 U 中一个由满足 (i) 的指标 i 组成的集合 A。类似的考虑将产生 U 中一个由这样的指标 i 组成的集合 B：对于所有的 j，k $(1 \leqslant j, k \leqslant n)$，$f^j(i) = f^k(i)$ 当且仅当 $f_U^j = f_U^k$。显然，$A \cap B$ 是在 U 中的，因而（尤其）是不空的。那么任取一个 $i \in A \cap B$ 就行了。它显然满足 (i)，而且所要求的谓词 Y_1^i，…，Y_m^i 也可如此而得：Y_j^i 是由满足 $Y_j(f_U^{k1}, \cdots, f_U^{knj})$ 的所有 n_j 元序组 $\langle f^{k1}(i), \cdots, f^{knj}(i) \rangle$ 所组成的集合。由 $i \in B$ 这一事实可以很容易地看出，如果 $Y_j \langle f_U^{k1}, \cdots, f_U^{knj} \rangle$ 不成立，那么 $Y_j{}^i(f^{k1}(i), \cdots, f^{knj}(i))$ 也不成立。因此 (ii) 得到满足。 ■

推论 3.13　任意一个具有引理 3.12 中所描述的形式的二阶语句可以用单独一个一阶公式来定义。

证明：令 φ 是这样的一个二阶语句。显然，φ 和 $\neg \varphi$ 二者都对同构保持。而

且，$\neg\varphi$ 也因等值于一个特称的二阶语句而对超积保持（参看［17］，推论 4.1.14）。引理 3.12 说的是，φ 同样对超积保持；因此熟知的、初等类的凯斯勒刻画（参看［17］，推论 6.1.16）得到满足：φ 可用单独一个一阶语句来定义。

■

对作为 L_2-公式的模态公式的进一步研究，特别是它们跟 L_0-公式的联系，将在第 7 章中进行。

4 模态代数

在本章中，我们将叙述一些跟模态代数有关的基本概念以及它们与可能世界语义的联系。至于详尽的阐述，请参看［30］。

定义 4.1 一个模态代数就是一个五元序组 $\mathbf{A}=\langle A, 1, -, \cap, l\rangle$，这里 $\langle A, 1, -, \cap\rangle$ 是一个布尔代数，而 l 是 A 上的一个一元运算，它满足

（1）$l(x\cap y)=l(x)\cap l(y)$；

（2）$l(1)=1$。

如果按适当的方式解释布尔算子并使 L 对应于运算 l，那么模态公式就可被当作能在这些代数中按显然的方式来解释的多项式。更严格地说，模态公式 φ 的多项式副本 $\bar{\varphi}$ 可以根据下述条款归纳地定义：

（1）$\overline{\top}=1$，$\overline{\bot}=0(=-1)$；

（2）对各个命题字母 p，$\bar{p}$ 是某个跟 p 相联系的变项；

（3）$\overline{\neg\varphi}=-\bar{\varphi}$；

（4）$\overline{\varphi\wedge\psi}=\bar{\varphi}\cdot\bar{\psi}$；

（5）$\overline{L\varphi}=l(\bar{\varphi})$。

例如，$\overline{Lp\rightarrow Mp}=\overline{\neg(Lp\wedge L\neg p)}$ 就成为 $-(l(x)\cdot l(-x))$。显然，为变项指定 A 中对象的指派或许被提升为从这一类多项式到 A 的映射。

常用的代数概念（同态，子代数和直积）都直接适用于模态代数。

任意一个框架 $\mathbf{F}(=\langle W, R\rangle)$ 导出一个模态代数 $\mathbf{F}^{+}=\langle A, 1, -, \cap, l\rangle$，这里 A 是 W 的幂集，$1=W$，$-$是相对于 W 的补，$\cap$是交，并且 l 是通过对于所有的 $X\subseteq W$ 取 $l(X)=\{w\in W\mid\forall v\in W(Rwv\Rightarrow v\in X)\}$ 而定义的那个集论运算。显然，$Th_{mod}(\mathbf{F})$ 恰好由那些模态公式组成：当把它们当做多项式时，无论对其中的变项做什么样的指派，它们在 $\mathbf{F}^{+}$ 中的取值都是 1。

众所周知的斯通表示定理使模态代数 $\mathbf{A}$ 跟框架 $\mathbf{F}$（$=\langle W, R\rangle$）联系起来，

这里 W 是由 **A** 上所有超滤所组成的集，而 R 则是某个适当定义的关系。结果是，这样一个 **F** 的模态理论不一定等于 **A** 的模态理论（不过前者被包含于后者）。为了得到更好的对应，有必要引进下述概念。

定义 4.2（Thomason [79]） 一个一般框架 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W}\rangle$ 是由一个框架 $\mathbf{F}(=\langle W, R\rangle)$ 和一个由 W 的子集形成的非空集 **W** 组成，对交、相对于 W 的补和上面定义的集论运算 l 都封闭。一个模态公式 φ 为在 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W}\rangle$ 中的 w 处成立，记成 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W}\rangle \models \varphi[w]$，是指对 **F** 上所有在 **W** 中取值的赋值 V 有 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models \varphi[w]$ [$\langle \mathbf{F},\mathbf{W}\rangle \models \Sigma[w]$，$\langle \mathbf{F}, \mathbf{W}\rangle \models \varphi$，$\langle \mathbf{F}, \mathbf{W}\rangle \models \Sigma$，以及 $Th_{mod}(\langle \mathbf{F}, \mathbf{W}\rangle)$ 等则都按例行的方式来定义]。

虽然一般框架是作为模态代数的集论表示而被发现的，但它们的引入同样也有另外的动机。当论述公理理论时，我们常常有一个公式 φ 作为公理模式来用，即 φ 所有的代入实例都被算作公理。于是，若对某个框架 **F** 有 $\mathbf{F} \models \varphi$，则对 φ 的任意一个代入实例 $[\psi_1/p_1, \cdots, \psi_n/p_n]\ \varphi$ 也确有 $\mathbf{F} \models [\psi_1/p_1, \cdots, \psi_n/p_n]\ \varphi$（这可由引理 2.5 推出）。但是，如果 φ 所有的代入实例都在某个模型 **M** 中为真，那么这一事实并不能被概括起来说成为 $\mathbf{M} \models \varphi$，因为 φ 在 **M** 中为真不一定蕴涵它的代入实例在 **M** 中为真。不过，通过把 $\mathbf{M}\ (=\langle W, R, V\rangle)$ 变成一般框架 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W}\rangle = \langle\langle W, R\rangle, \{V(\psi) \mid \psi$ 是模态公式$\}\rangle$，只要说 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W}\rangle \models \varphi$ 就够了。因为，一个公式在一个一般框架中为真蕴涵着它所有的代入实例都真。

注意，标准的框架都可当作一般框架来看，此时 **W** 等于 W 的幂集。

“一般框架”这一术语取自于亨金的“一般模型”，正如一般框架扩充了（标准）框架类一样，一般模型扩充了标准（二阶）模型类[33]。

跟框架有关的那四个基本概念也都可应用于一般框架：

定义 4.3 一般框架 $\langle \mathbf{F}_1, \mathbf{W}_1\rangle$ 为一般框架 $\langle \mathbf{F}_2, \mathbf{W}_2\rangle$ 的一个生成子框架，记成 $\langle \mathbf{F}_1, \mathbf{W}_1\rangle \subseteq_{\rightarrow} \langle \mathbf{F}_2, \mathbf{W}_2\rangle$，是指 $\mathbf{F}_1$ 为 $\mathbf{F}_2$ 的一个生成子框架并且 $\mathbf{W}_1 = \{X \cap W_1 \mid X \in \mathbf{W}_2\}$。

一般框架集 $\{\langle \mathbf{F}_i, \mathbf{W}_i\rangle \mid i \in I\}$ 的不相交并 $\Sigma\{\langle \mathbf{F}_i, \mathbf{W}_i\rangle \mid i \in I\}$ 是指一般框架 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W}\rangle$，这里 $\mathbf{F}\ (=\langle W, R\rangle) = \Sigma\{\mathbf{F}_i \mid i \in I\}$ 而 $\mathbf{W} = \{X \subseteq W \mid$ 对各个 $i \in I$ 有 $X \cap W_i \in \mathbf{W}_i\}$。

一般框架 $\langle \mathbf{F}_1, \mathbf{W}_1\rangle$ 到一般框架 $\langle \mathbf{F}_2, \mathbf{W}_2\rangle$ 上的映射 f 为一个 p-态射，是指 f 为从 $\mathbf{F}_1$ 到 $\mathbf{F}_2$ 上的 p-态射而 $\mathbf{W}_1 \supseteq \{f^{-1}[X] \mid X \in \mathbf{W}_2\}$。

有关模态公式在一般框架中的真值的相关结果（对应于引理 2.11，推论 2.12，推论 2.15，引理 2.17 和推论 2.18）都是显而易见的，这里将不作陈述。

一般框架导出模态代数，完全跟框架一样。

定义 4.4　如果 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle$ 是一个一般框架，则模态代数 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle^+$ 是指 $\langle \mathbf{W}, W, -, \cap, l \rangle$，这里 l 的定义如上。

反过来，一般框架也可通过众所周知的斯通表示当作模态代数的集论表示来用。

定义 4.5　如果 $\mathbf{A}$ 是一个模态代数，则 $SR(\mathbf{A})$ 是一般框架 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle$（$= \langle \langle W, R \rangle, \mathbf{W} \rangle$），其中

（1）W 是由 $\mathbf{A}$ 上所有超滤组成的集；

（2）RU_1U_2，如果对于所有的 $a \in A$ 有，若 $l(a) \in U_1$ 则 $a \in U_2$；

（3）$\mathbf{W}$ 由 W 中所有形如 $\{U \mid a \in U\}$（对某个 $a \in A$ 而言）的子集所组成的集合。

常用的同构使 $\mathbf{A}$ 跟 $SR(\mathbf{A})^+$ 联系起来。但是，为了得到一般框架范畴和模态代数范畴之间的一个对偶性，也有必要有下述同构：$\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle \cong SR(\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle^+)$。不过，这并不对所有的一般框架都成立，因此我们给出下述定义。

定义 4.6　一个一般框架为*描述性的*，是指它满足下列三个条件：

（1）对任意 $w, v \in W$，若 $w \neq v$，则对某个 $X \in \mathbf{W}$，$w \in X$，且 $v \notin X$；

（2）对任意 $w, v \in W$，若 Rwv 不成立，则对某个 $X \in \mathbf{W}$，$w \in l(X)$，且 $v \notin X$；

（3）任意一个具有有穷交性质的集合 $S \subseteq \mathbf{W}$ 都有一个非空的交集。

利用 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle$ 同样是 L_2 的一个（一般）模型这一事实，条件（1）和（2）可以更精致地重述为：

（1）$\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle \models \forall x \forall y(\forall P(Px \to Py) \to x = y)$（不可辨别元的等同）；

（2）$\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle \models \forall x \forall y(\forall P(\forall z(Rxz \to Pz) \to Py) \to Rxy)$。

描述性的一般框架之所以重要就在于它们都是斯通表示的*不动点*：

引理 4.7　一般框架 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle$ 为描述性的，当且仅当，

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle \cong SR(\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle^+)。$$

我们现在转向主要的代数概念和关于一般框架的那些概念之间的对应，上面说到的对偶性就建立在这一对应上。

引理 4.8　如果 f 是从模态代数 $\mathbf{A}_1$ 到 $\mathbf{A}_2$ 上的同态，那么由 $g(U) = f^{-1}[U]$ 定义的从 $SR(\mathbf{A}_2)$ 到 $SR(\mathbf{A}_1)$ 的映射 g 是到 $SR(\mathbf{A}_1)$ 的一个生成子框架上的同构。

如果 $\langle \mathbf{F}_1, \mathbf{W}_1 \rangle$ 是 $\langle \mathbf{F}_2, \mathbf{W}_2 \rangle$ 的一个生成子框架，那么由 $g(X) = X \cap W_1$ 定义的从 $\langle \mathbf{F}_1, \mathbf{W}_1 \rangle^+$ 到 $\langle \mathbf{F}_2, \mathbf{W}_2 \rangle^+$ 上的映射 g 是一个同态。

引理 4.9　如果模态代数 $\mathbf{A}_1$ 是 $\mathbf{A}_2$ 的一个子代数，那么由 $g(U) = U \cap A_1$ 定义的从 $SR(\mathbf{A}_2)$ 到 $SR(\mathbf{A}_1)$ 的映射 g 是一个 p-态射。

如果f是一个从一般框架 $\langle \mathbf{F}_1, \mathbf{W}_1 \rangle$ 到 $\langle \mathbf{F}_2, \mathbf{W}_2 \rangle$ 上的一个p-态射，那么由$g(X) = f^{-1}[X]$ 定义的从 $\langle \mathbf{F}_2, \mathbf{W}_2 \rangle^+$ 到 $\langle \mathbf{F}_1, \mathbf{W}_1 \rangle^+$ 的映射g是到 $\langle \mathbf{F}_1, \mathbf{W}_1 \rangle^+$ 的一个子代数上的同构。

引理 4.10 由$g(X) = \langle X \cap W_i \rangle_{i \in I}$定义的映射$g$是 $(\sum \{\langle \mathbf{F}_i, \mathbf{W}_i \rangle \mid i \in I\})^+$ 和$\prod \{\langle \mathbf{F}_i, \mathbf{W}_i \rangle^+ \mid i \in I\}$ 之间的一个同构。

不过，$SR(\prod \{\mathbf{A}_i \mid i \in I\})$ 并不总是同构于$\sum \{SR(\mathbf{A}_i) \mid i \in I\}$。据引理4.8可知，由于$\mathbf{A}_i$是$\prod \{\mathbf{A}_i \mid i \in I\}$ 的一个同态象，故而$SR(\mathbf{A}_i)$ 同构于$SR(\prod \{\mathbf{A}_i \mid i \in I\})$ 的一个生成子框架。从而$\sum \{SR(\mathbf{A}_i) \mid i \in I\}$ 也同构于$SR(\prod \{\mathbf{A}_i \mid i \in I\})$ 的一个生成子框架。此外，$SR(\prod \{\mathbf{A}_i \mid i \in I\})$ 确实同构于$SR((\sum \{SR(\mathbf{A}_i) \mid i \in I\})^+)$。

这三个结果使我们能够利用柏克霍夫定理把等式簇（即某个由等式组成的集合所定义的代数类）刻画为对同态、子代数和直积都封闭的代数类（参看第14章和第16章）。然而，应当说明的是，对偶性还有更多的推广，例如，柏克霍夫关于次直积不可约代数的结果也同样可以被应用[14]。注意引理2.20和柏克霍夫的一个定理之间的相似性，后者说的是任意一个代数同构于次直积不可约代数的积的一个子代数。事实上，对于任意一个使$\mathbf{F}$为生成框架的一般框架 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle$①而言，$\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle^+$都是一个次直积不可约代数。不过，这个结论的逆并不成立；但这里的复杂情形跟本书的工作无关。

跟一般框架有关的一个重要概念仍有待引进，也就是“超积”概念。从经典模型论来看，如何定义（在第2章的意义下的）框架或模态代数的超积是很清楚的[17]。不过，一般框架的情形需要做些反思。

定义 4.11 令 $\{\langle \mathbf{F}_i, \mathbf{W}_i \rangle \mid i \in I\}$ 是一个一般框架族，并令U是I上的一个超滤。这个族的超积$\prod_U \{\langle \mathbf{F}_i, \mathbf{W}_i \rangle \mid i \in I\}$ 就是这样一个一般框架 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle$：

(1) $\mathbf{F}(= \langle W, R \rangle)$ 是通常的超积$\prod_U \{\mathbf{F}_i \mid i \in I\}$，并且

(2) $\mathbf{W}$由W所有形如$\prod_U \{X_i \mid i \in I\} = \{f_U \in W \mid \{i \in I \mid f(i) \in X_i\} \in U\}$ 的子集组成；这里，对各个$i \in I$，$X_i \in \mathbf{W}_i$。

验证$\prod_U \{\langle \mathbf{F}_i, \mathbf{W}_i \rangle \mid i \in I\}$ 为一般框架是例行公事：定义4.2所要求的三个闭包条件在这个超积中成立是因为它们在所有因子中都成立。例如，关于运算l的那一条可从这样的当且仅当命题推出：

$$\exists g_U \in W(Rf_U g_U \& g_U \in \prod_U \{X_i \mid i \in I\}), \text{ 当且仅当},$$

$$f_U \in \prod_U \{\{w \in W_i \mid \exists v \in X_i R_i wv\} \mid i \in I\};$$

① 原书中W为黑斜体，应为黑正体。下文类似的问题将做同样的修正，不再说明——译者注。

它的证明正好类似于沃斯基本定理证明中特称量词那一步。

在返回到代数以前，让我们注意，一般框架的这样一个超积仍是二阶语言 L_2 的一个（一般）模型。因此，可以得到沃斯定理的下述推广；第 13 章、第 14 章和第 17 章将用到这一结果。

定理 4.12　对于以 L_0 为基础的一元二阶语言（即 L_2）中的任意一个拥有自由个体变项 x_1，…，x_k 和自由一元谓词变项 P_1，…，P_m 的公式 φ，

$$\prod_U\{\langle \mathbf{F}_i,\mathbf{W}_i\rangle \mid i\in I\}\models \varphi[f_U^1,\cdots,f_U^k;\prod_U\{X_i^1\mid i\in I\},\cdots,\prod_U\{X_i^m\mid i\in I\}]$$

当且仅当

$$\{i\in I\mid \langle \mathbf{F}_i,\mathbf{W}_i\rangle\models\varphi[f^1(i),\cdots,f^k(i);X_i^1,\cdots,X_i^m\}]\in U。$$

证明：这个断言的证明是施归纳于 L_2-公式的复杂度上而作的。它完全类似于一阶情形[17,30]。■

在最后的分析中，全部问题就归结到多种类一阶逻辑的沃斯定理（参看第 17 章或者［20］）。

注意下述重要区别。从一个框架族 $\{\mathbf{F}_i\mid i\in I\}$ 我们得到“通常的”超积 $\prod_U\{\mathbf{F}_i\mid i\in I\}$，可以按普通的方式把它当作一般框架；即利用所产生的个体域的幂集。但是，如果诸因子 $\mathbf{F}_i$ 本身已被按此方式认作一般框架，比方说为 $\langle\mathbf{F}_i$，$P(\mathbf{W}_i)\rangle$，那么定义 4.11 中所定义的超积 $\prod_U\{\langle\mathbf{F}_i, P(\mathbf{W}_i)\rangle\mid i\in I\}$ 正常情形下将不同于前者：它们包含的集合要少得多（正是这一性质使我们能够证明定理 4.12）。例如，如果一个模态公式 φ 在所有 $\mathbf{F}_i(i\in I)$ 中为真，根据上面定理 4.12，它将在后一个超积中也为真，但它可能在前一个超积中不为真。对前一意义上的超积保持甚至等价于一阶可定义性，这个结果将在第 8 章中证明。

最后，我们介绍一个有用的代数对偶性结果，它非常像引理 4.10（参看［30］，推论 7.8）：

引理 4.13　由 $g(\prod_U\{X_i\mid i\in I\})=(\langle X_i\rangle_{i\in I})_U$ 定义的映射 g 是（$\prod_U\{\langle\mathbf{F}_i$，$\mathbf{W}_i\rangle\mid i\in I\})^+$ 和模态代数 $\langle\mathbf{F}_i$，$\mathbf{W}_i\rangle^+(i\in I)$ 的超积（$\prod_U\{\langle\mathbf{F}_i$，$\mathbf{W}_i\rangle^+\mid i\in I\}$）之间的一个同构。

这些代数技术在本书的第三部分和第四部分中将成为重要技术。

5 公理化理论

本章将给出模态逻辑句法方面的一些基本信息。习惯上都用$\top$、$\neg$ 、$\rightarrow$和 L 作初始符号，故而这里也同样遵循这一约定。

考虑命题逻辑的某一组完全的公理模式，唯一的推理规则是分离规则（即从 φ 和 $\varphi\rightarrow\psi$ 推出 ψ）。在此基础上添加下面的原则（对于所有的模态公式 φ 和 ψ）就得到极小模态逻辑 K：

定　　义：$M\varphi=\neg L\neg\varphi$

公理模式：$L(\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow(L\varphi\rightarrow L\psi)$

推理规则：从 φ 可以推出 $L\varphi$（必然概括）。

K 内的可推导性概念容易定义（记号$\Sigma\vdash_K\varphi$ 指“在 K 内 φ 是从Σ可推导的”）。

不用公理模式而改用单个公理并附加代入规则（即推出已经得到的公式的任意一个代入实例），这样做可以得到 K 的一个众所周知的变形。后面这个系统将被称为 Ks。据冯·诺伊曼的结果可知，K 和 Ks 正好有相同的定理。此外，我们还把“在 Ks 内 φ 是从Σ可推导的”记成$\Sigma\vdash_{Ks}\varphi$。

这里研究的模态逻辑都由 K 和附加的公理组成。在文献中这样的公理理论都被称作正规模态逻辑，以便跟大家研究的较弱的（或不可比较的）系统相区别[67]。为了使读者对文献中能看到的那种模态公理有一个印象，这里将提出几个正规模态系统。

逻辑	特征公理
D	$M\top$
T	$L\varphi\rightarrow\varphi$
$S4$	$L\varphi\rightarrow\varphi$，$L\varphi\rightarrow LL\varphi$
$S4.1$	$L\varphi\rightarrow\varphi$，$L\varphi\rightarrow LL\varphi$，$LM\varphi\rightarrow ML\varphi$
$S4.2$	$L\varphi\rightarrow\varphi$，$L\varphi\rightarrow LL\varphi$，$ML\varphi\rightarrow LM\varphi$
$S4.3$	$L\varphi\rightarrow\varphi$，$L\varphi\rightarrow LL\varphi$，

	$L(L\varphi\to L\psi)\vee L(L\psi\to L\varphi)$
$S5$	$L\varphi\to\varphi$，$L\varphi\to LL\varphi$，$ML\varphi\to\varphi$
B	$L\varphi\to\varphi$，$ML\varphi\to\varphi$
Dum	$L(L(\varphi\to L\varphi)\to\varphi)\to\varphi$
LF	$L(L\varphi\to\varphi)\to L\varphi$
Id	$\varphi\leftrightarrow L\varphi$
Un	$L\bot$

这些都是模态公理。在内涵逻辑的其他分支（例如，时态逻辑或道义逻辑）中将需要不同的原则。例如，（从模态来看是不足道地成立的）$L\varphi\to\varphi$ 在道义逻辑中是很不合理的（此时“L”被解释为“义务”），而在时态逻辑中则干脆就是假的［此时“L”被解释为“（从现在起）将总是］。

为了说明什么是模态推演，我们将给出最近的两个巧妙的证明。回想一下，我们在前面看到，LF 蕴涵传递性［第 3 章，例（9）］。德漾证明了［撒宾（G. Sambin）独立地发现了这一证明[54]］$Lp\to LLp$ 在 LF 中是可推导的：

（1）用 $p\wedge Lp$ 替代 LF 中的 p。这样就得到公理

$$L(L(p\wedge Lp)\to(p\wedge Lp))\to L(p\wedge Lp);$$

（2）$Lp\to L(L(p\wedge Lp)\to(p\wedge Lp))$ 在 LF 中是可证的；实际上。它在 $\boldsymbol{K}$ 中就已经是可推导的：

$L(p\wedge Lp)\to Lp$,

$p\to(L(p\wedge Lp)\to(p\wedge Lp))$,

$L(p\to(L(p\wedge Lp)\to(p\wedge Lp)))$,

$Lp\to L(L(p\wedge Lp)\to(p\wedge Lp))$;

（3）从（1）和（2）推出 $Lp\to L(p\wedge Lp)$，这在 LF 中是可证的。这公式在 $\boldsymbol{K}$ 中蕴涵 $Lp\to LLp$，从而在 LF 中亦是如此。

类似地，Dum 也蕴涵传递性（和自返性）。在 Dum 中推导 $Lp\to p$ 是不足道的事情，但在布洛克［普勒杰（K. Pledger）独立地］找到一个证明说明 $Lp\to LLp$ 在逻辑 Dum 中是可推导的以前大家探索了很长时期[13]：

（1）用 $\sigma=p\wedge(Lp\to LLp)$ 替代 Dum 中的 p。这样产生公理 $L(L(\sigma\to L\sigma)\to\sigma)\to\sigma$；

（2）$p\to(L(\sigma\to L\sigma)\to\sigma)$ 在 Dum 中是可证的；实际上，它在 K 中就已经是可推导的：

$p\to(L(\sigma\to L\sigma)\to p)$ 显然是可证的，并且下述推理链就证明了公式：$L(\sigma\to L\sigma)\to(Lp\to LLp)$：

$$
\begin{aligned}
(Lp\wedge\neg LLp)&\rightarrow(Lp\wedge M\neg Lp)\\
&\rightarrow M(\neg Lp\wedge p)\\
&\rightarrow M(\neg Lp\wedge p\wedge(Lp\rightarrow LLp))\\
&\rightarrow(\text{利用前件公式})\ L(\sigma\rightarrow L\sigma))\\
&\rightarrow M(\neg Lp\wedge L(p\wedge(Lp\rightarrow LLp)))\\
&\rightarrow M(\neg Lp\wedge Lp)\\
&\rightarrow M\bot\\
&\rightarrow\bot
\end{aligned}
$$

换句话说，$(Lp\wedge\neg LLp)\rightarrow(L(\sigma\rightarrow L\sigma)\rightarrow\bot)$，

或者 $L(\sigma\rightarrow L\sigma)\rightarrow\neg(Lp\wedge\neg LLp)$（即 $Lp\rightarrow LLp$）。

（3）从（2）可推出 $L(p\rightarrow(L(\sigma\rightarrow L\sigma)\rightarrow\sigma))$，因此 $Lp\rightarrow L(L(\sigma\rightarrow L\sigma)\rightarrow\sigma)$ 在 *Dum* 中是可推导的。这个结论跟（1）结合起来就可证明 $Lp\rightarrow(p\wedge(Lp\rightarrow LLp))$。这一公式蕴涵 $Lp\rightarrow(Lp\rightarrow LLp)$，因而在 ***K*** 中蕴涵 $Lp\rightarrow LLp$，所以也在 *Dum* 中。
这些模态推演之复杂跟第 3 章中直截了当的语义证明相比，确实令人很不满意。

模态逻辑句法方面的多数结果都是在过去数十年间发现的，例如，*S5* 的范式定理[36]或者表明对任意闭的模态公式 φ（即 φ 不含有命题字母）都有 $\vdash_D\varphi$ 或 $\vdash_D\neg\varphi$ 的定理[70]。这一领域中的一个重要结果是引理 2.19 ①的一个句法对应结果：任意一个协调的正规模态逻辑或是被包含于 *Id* 中、或是被包含于 *Un* 中[57]。这些结果具有一定的局限性，因为以下的事实：我们同样必须立即建立不可证性。例如，当证明 *S4* 中恰好有 14 个模态词时[36]，我们不仅要在 *S4* 中证明一些等值式（如 $LMLMp\leftrightarrow LMp$），而且还必须证明其他等值式（如 $LMLp\leftrightarrow MLp$）在这个理论中不是可证的。为此，通常需要使用*反例*方法，这就跟语义发生了联系。这个联系将在下一章中探讨。

为了便于对上述那样的公理理论进行研究，我们给出下述正式定义。

定义 5.1 *一个模态逻辑*就是一个模态公式集，它包含 ***K*** 中公理的所有实例并对分离规则、必然概括和代入规则都封闭。对于任意一个模态公式集 Σ，*由 Σ 公理化的模态逻辑*，记成 $\mathrm{ML}(\Sigma)$，就是包含 Σ 的那个最小模态逻辑。

上面那些例子都是利用*有穷的*模态公式集来公理化的。不幸的是，所有有穷可公理化的模态逻辑并不形成由所有模态公式所组成的类的一个良好的子类。很容易明白，如果 φ_1 公理化 Σ_1，并且 φ_2 公理化 Σ_2，那么由 $\Sigma_1\cup\Sigma_2$ 公理化的模

① 原文是"引理 2.15"，实际上是"引理 2.19"——译者注。

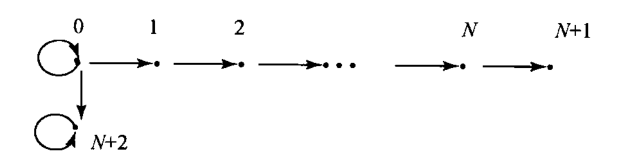
态逻辑也可用 $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ 来公理化。不过，模态逻辑 $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ 就完全不一定是有穷可公理化的！$M\top$ 和 $Mp \to Lp$ 就是一个反例：$\mathrm{ML}(\{M\top\}) \cap \mathrm{ML}(\{Mp \to Lp\})$ 不是有穷可公理化的。

要弄明这一点，首先应注意，对于任意两个模态公式 φ_1，φ_2 而言，$\mathrm{ML}(\{\varphi_1\}) \cap \mathrm{ML}(\{\varphi_2\})$ 是由无穷集 $\{L^i\varphi_1 \vee L^j\varphi_2 \mid i, j \geqslant 0\}$ 公理化的，这里 $L^k\varphi = L\cdots$（k 次）$\cdots L\varphi$。如果这个模态逻辑是由某个模态公式 ψ 公理化的，那么由此可得，对某个 N，$\psi \in \mathrm{ML}(\{L^i\varphi_1 \vee L^j\varphi_2 \mid 0 \leqslant i, j \leqslant N\})$；因而 $\{L^i\varphi_1 \vee L^j\varphi_2 \mid 0 \leqslant i, j \leqslant N\}$ 也公理化了整个集合。因此，特别是有 $L^{N+1}\varphi_1 \vee L^{N+1}\varphi_2 \in \mathrm{ML}(\{L^i\varphi_1 \vee L^j\varphi_2 \mid 0 \leqslant i, j \leqslant N\})$。当这一观察被应用于上述例子时就足以说明，对于任意一个 N 都不会有 $L^{N+1}M\top \vee L^{N+1}(Mp \to Lp) \in \mathrm{ML}(\{L^iM\top \vee L^j(Mp \to Lp) \mid 0 \leqslant i, j \leqslant N\})$。下面我们构造一个反例，它之所以为反例的理由将由下一章中的完全性理论给出。

令 $\mathbf{F} = \langle W, R\rangle$，其中

$W = \{0, \cdots, N+2\}$，

$R = \{\langle i, i+1\rangle \mid 0 \leqslant i \leqslant N\} \cup \{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, N+2\rangle, \langle N+2, N+2\rangle\}$。



$L^{N+1}M\top \vee L^{N+1}(Mp \to Lp)$ 在 $\mathbf{F}$ 中并不成立。因为，如果取 $V(p)$ 为 $\{1\}$，则 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models Mp \wedge \neg Lp[0]$。因而 $L^{N+1}(Mp \to Lp)$ 在 0 处不成立。此外，由于 $M\top$ 在 $N+1$ 处不成立，故而 $L^{N+1}M\top$ 在 0 处也不成立，甚至无论选择哪一个赋值都是如此。但是对于任意满足 $0 \leqslant i, j \leqslant N$ 的 i，j，$L^iM\top \vee L^j(Mp \to Lp)$ 都在 $\mathbf{F}$ 中成立。要明白这一点，请验证

(i) 对所有的 $i \geqslant 0$ 都有 $\mathbf{F} \models L^iM\top[N+2]$

(ii) 对所有的 $i \leqslant N$ 和各个 $k \in \{1, \cdots, N+1\}$ 都有 $\mathbf{F} \models L^i(Mp \to Lp)[k]$ ①

(iii) 对每一个 $i \leqslant N(!)$ 都有 $\mathbf{F} \models L^iM\top[0]$

刚才所证明的一切都可以从代数的角度作如下描述。所有有穷可公理化的模态逻辑并不形成由所有模态逻辑在通常的运算（即交和并的演绎闭包）下所

① 这里的 $i \leqslant N$ 原书为 $i \leqslant 0$——译者注。

组成的格的一个子格［但请注意，如果只注意包含 $S4$ 的那些模态逻辑，那么这个结论确实成立。因为，$L\varphi_1 \vee L\varphi_2$①将公理化 $ML(\{\varphi_1\}) \cap ML(\{\varphi_2\})$］。这一否定性结果使人更乐意研究带任意公理集的模态逻辑，这跟泛代数中情形一样，在那里限制于仅由有穷多个等式公理化的代数理论将破坏柏克霍夫定理的完美。

① 原书没有析取符号——译者注。

6 完全性

最小模态逻辑 K 内的可推导性概念 $\vdash_K$ 被证明为就是第 2 章引进的语义后承概念$\models_m$ 的句法匹配物。

定理 6.1 对所有模态公式集 Σ 和所有模态公式 φ，$\Sigma \vdash_K \varphi$，当且仅当，$\Sigma \models_m \varphi$。

注意，关于定理 6.1 的有意思之处并不在于$\models_m$ 有一个句法刻画：这从第 3 章给出的那个把模态公式到 L_1 的翻译就已经非常清楚。但是，知道像 K 这样一个简单系统就能够做到却是很有用的。

定理 6.1 的证明：定理 6.1 是用麦金森[56]和莱蒙（E. J. Lemmon）与斯科特（D. Scott）[48]发现的亨金构造来证明的。虽然这样的证明现在已是众所周知的，但这里还将重述一些重要的特征。施归纳于从 Σ 到 φ 的推导的长度上的例行做法将证明从左到右的方向。至于另一方向，我们可以考虑 Σ 的亨金模型 $HM(\Sigma)$，它由 Σ 的亨金框架 $HF(\Sigma)$ 加上一个赋值 V_Σ 组成；它们的定义如下。$HF(\Sigma) = \langle W_\Sigma, R_\Sigma \rangle$，这里 W_Σ 由所有极大 Σ-协调的模态公式集组成［称 Δ 为 Σ-协调的，是指没有任何 $\delta_1, \cdots, \delta_n \in \Delta$ 使得 $\Sigma \vdash_K \neg(\delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_n)$］，$R_\Sigma \Delta_1 \Delta_2$ 成立，仅当对于所有的模态公式 φ 而言，若 $L\varphi \in \Delta_1$ 则 $\varphi \in \Delta_2$，并且 $V_\Sigma(p)$ 被定义为 $\{\Delta \in W_\Sigma \mid p \in \Delta\}$。

请注意 R_Σ 的定义和定义 2.24 中 R_F 的定义之间的相似性。一个本质上跟引理 2.25 中的证明一样的证明建立了下述当且仅当命题：对于所有的模态公式 φ 和所有的 $\Delta \in W_\Sigma$，

$$HM(\Sigma) \models \varphi[\Delta]，当且仅当，\varphi \in \Delta。$$

现在，假定 $\Sigma \nvdash_K \varphi$，即，$\{\neg\varphi\}$ 是 Σ-协调的。据林登鲍姆（A. Lindenbaum）扩张定理可知，$\{\neg\varphi\}$ 被包含于某个 $\Delta \in W_\Sigma$。于是，据上述的当且仅当命题，$HM(\Sigma) \models \neg\varphi[\Delta]$，即 φ 在 $HM(\Sigma)$ 中并不成立。但显然，$HM(\Sigma) \models \Sigma$，因

为每一个极大Σ-协调集都包含Σ。所以，HM(Σ）为$\Sigma \models_m \varphi$提供了一个反例。

■

注记：定理6.1的证明和引理2.25的证明（是由代数中的斯通表示定理所启示的）之间的类似毫不令人惊奇。亨金型的证明（从代数上来讲）不过就是一个代数完全性证明和一个证实（verifying）林登鲍姆代数的集论表示相结合。

形如HM（Σ）的亨金模型被法因刻画为仅指那些满足某些被称作“紧密性”（tightness)、“1-饱和性”以及“2-饱和性”[24]的性质的模型。就模型而言，这些性质表达了定义4.6中对于描述性一般框架所提出的三个要求（1)、（2）和（3)。后者的表述也同样可以用于这一情形。通过下面的重述（在第4章已经讲过)，亨金模型HM(Σ）也可以被当作一般框架来看：HGF(Σ)=〈HF(Σ)，$\mathbf{W}_\Sigma$〉，这里的$\mathbf{W}_\Sigma$被定义为由W_Σ所有形如$\{\Delta \in W_\Sigma \mid \varphi \in \Delta\}$（对某个模态公式$\varphi$而言）的子集所组成的集。注意，如果对代入实例封闭，那么HGF(Σ)$\models$Σ。这个注记使我们能为第5章引进的K_s内的可推导性概念（$\vdash K_s$）找到一个语义等价物：

定义6.2 对于一个模态公式集Σ和一个模态公式φ而言，$\Sigma \models_{gf} \varphi$是指对所有的一般框架〈**F**，**W**〉都有：若〈**F**，**W**〉$\models$Σ，则〈**F**，**W**〉$\models \varphi$。

注意，$\Sigma \models_m \varphi$，则$\Sigma \models_{gf} \varphi$，则$\Sigma \models_f \varphi$。不过，这两个蕴涵命题中没有哪一个的逆命题是可以成立的。就第一个而言，这是不足道的：$\{p\} \models_{gf} \bot$而$\{p\} \models_m \bot$不成立。关于第二个蕴涵命题的反例将在下面给出。上述证明的一个很容易的改述就产生下述的完全性定理。

定理6.3 对所有模态公式集Σ和所有模态公式φ，$\Sigma \vdash_{K_s} \varphi$［即$\varphi \in$ ML（Σ)]，当且仅当，$\Sigma \models_{gf} \varphi$。

重复一遍，形如HGF(Σ）的一般框架都是描述性的［而且，倒过来说，任意一个描述性框架也可被当作一个一般框架HGF(Σ）（的同构拷贝）来看，就在某个适当构造起来的模态命题语言中的适当选取的某个Σ而言是如此]。

不过，较为熟知的模态完全性定理仍然具有不同的形式。例如，一个模态公式是*S5*的定理的，当且仅当，它在所有取等价关系为择代关系的框架中成立。如果利用*S5*的特征公理$Lp \to p$，$Lp \to LLp$和$MLp \to p$依次分别定义自返性、传递性和对称性的事实，按现在的说法来重述这个定理，那么它就具有下述形式。对于公理化*S5*的集合Σ和任意一个模态公式φ而言，

$$\varphi \in \mathrm{ML}(\Sigma)，当且仅当，\Sigma \models_f \varphi;$$

这里，$\models_f$是第2章引进的所有框架类上的语义后承关系。换句话说，模态完全性定理是关于$\models_f$和$\vdash_{K_s}$在其上恰好重合的集合Σ的。

定义 6.4　一个模态公式集Σ为完全的，记成$\Sigma \in C$，是指对所有的模态公式φ，$\varphi \in ML(\Sigma)$，当且仅当，$\Sigma \models_f \varphi$。

这定义可以用另一种措辞表达如下。

引理 6.5　Σ是完全的，当且仅当，存在一个框架$\mathbf{F}$使得$Th_{mod}(\mathbf{F}) = ML(\Sigma)$。

证明：从右到左的方向是显然的。至于相反的方向，为每一个$\varphi \notin ML(\Sigma)$取一个$\mathbf{F}$使得$\mathbf{F} \models \Sigma$，且$\mathbf{F} \not\models \varphi$，然后考虑这些$\mathbf{F}$的不相交并。■

诸如$S5$完全性一类的结果都相当容易通过检查$HM(S5)$来证明。只需证明$S5$不仅在$HGF(S5)$上而且也在$HF(S5)$上成立就够了；因为那个框架使所有不是$S5$的定理的公式都为假。接着，一个容易的论证可以表明$S5$的特征公理导出它们定义的关系的性质（由于R_{S5}的定义）。不过在许多情形下，完全性的证明要求运用外加的技术，例如利用过滤技术[67]。虽然这样的证明常常是相当巧妙的，但1974年前还是明显缺乏一般性的方法和结果（值得注意的例外是布尔定理，此定理断定$S4.3$的每一个扩充都是完全的。也可参看法因的两篇论文[23]和[25]）。因此，人们开始不再希冀$\vdash_{K_s}$公理化$\models_f$（即克里普克语义最初被设想成是足够为各个模态逻辑作模型之用的）。

1974年，法因[22]和托马森[57]给出了不完全的模态逻辑的实例。即他们给出了具体的Σ和φ使得，$\Sigma \models_f \varphi$成立，但$\varphi \in ML(\Sigma)$不成立（不可能有相反的结论：如果$\varphi \in ML$，那么$\Sigma \models_f \varphi$）。这里我们讲一个简单的例子，取自于[13]：

令$\Sigma = \{L(Lp \to Lq) \vee L(Lq \to Lp),\ Lp \to p,\ LMp \to MLp,\ (Mp \wedge L(p \to Lp)) \to p\}$。$\Sigma \models_f p \to Lp$（即$\Sigma$跟由$p \leftrightarrow Lp$公理化的“经典”逻辑$Id$完全在同样的框架上成立），但$p \to Lp \notin ML(\Sigma)$①［即$ML(\Sigma)$是$Id$的一个真子集］。

$p \to Lp \notin ML(\Sigma)$这一结果是通过展示一个$\Sigma$在其上成立而$p \to Lp$不成立的一般框架来证明。

另一个不完全性例子也很简单，解说如下[12]。令$\Sigma = \{LM\top \to L(L(Lp \to p) \to p)\}$并令$\varphi = LM\top \to L\bot$。

定理 6.6　$LM\top \to L(L(Lp \to p) \to p) \models_f LM\top \to L\bot$，但$LM\top \to L\bot \notin ML(\{LM\top \to L(L(Lp \to p) \to p)\})$②。

证明：第一个断言是L_2-推演的一个简单的练习。注意到

$$\forall P\, ST(L(L(Lp \to p) \to p)) = \forall P \forall y(Rxy \to (\forall z(Ryz \to (\forall u(Rzu \to Pu) \to Pz)) \to Py))$$

蕴涵它的L_0-代入实例（以“$\bigstar \neq y$”替换子公式“$P\bigstar$”）：

① 此中的$\notin$原书为$\in$，有误——译者注。

② 此中的$\notin$原书为$\in$，有误——译者注。

$$\forall y(Rxy\rightarrow(\forall z(Ryz\rightarrow(\forall u(Rzu\rightarrow u\neq y)\rightarrow z\neq y))\rightarrow y\neq y))。$$

后面这个 L_0-公式等值于

$$\forall y(Rxy\rightarrow\neg\forall z(Ryz\rightarrow(\forall u(Rzu\rightarrow u\neq y)\rightarrow z\neq y))),$$

因而等值于

$$\forall y(Rxy\rightarrow\exists z\ (Ryz\wedge\forall u(Rzu\rightarrow u\neq y)\wedge z=y)),$$

即等值于

$$\forall y(Rxy\rightarrow(Ryy\wedge\forall u(Ryu\rightarrow u\neq y))),$$

即等值于

$$\forall y(Rxy\rightarrow(Ryy\wedge\neg Ryy)),$$

即等值于

$$\neg\exists yRxy=ST(L\bot)。$$

这个观察结果表明，$ST(LM\top\rightarrow L\bot)$ 甚至是可在一个很弱的二阶逻辑中从 $\forall P\ ST(LM\top\rightarrow L(L(Lp\rightarrow p)\rightarrow p))$ 推导出来的，尤其是在一个不带选择公理的弱二阶逻辑中可推导出来的（后面这个公理在所有以前的不完全性例子中都要用到）。这使得 Ks 不能为这个蕴涵命题提供证明的现象更加有意思。

令 $\langle\mathbf{F},\mathbf{W}\rangle$ 是这样定义的一般框架：

$W=IN\cup\{\omega,\ \omega+1\}$，

$R=\{\langle i,\ j\rangle\mid i,\ j\in IN\ \&\ i>j\}\cup\{\langle\omega,\ i\rangle\mid i\in IN\}\cup\{\langle\omega,\ \omega\rangle,\ \ \langle\omega+1,\ \omega\rangle\}$，

$\mathbf{W}=\{X\subseteq W\mid(X$ 是余有穷的，且 $\omega\in X)$，或者（X 是有穷的且 $\omega\notin X)\}$。

$$\begin{array}{ccccc} \cdots & & \cdots & & \\ 0\ 1\ 2 & & n\ \ n{+}1 & \cdots & \omega\ \ \omega{+}1 \end{array}$$

很易验证，$\mathbf{W}$ 满足一般框架的三个闭包条件。显然，$LM\top\rightarrow L\bot$ 并不属于 $Th_{mod}(\langle\mathbf{F},\mathbf{W}\rangle)$：考虑世界 $\omega+1$。但是，$LM\top\rightarrow L(L(Lp\rightarrow p)\rightarrow p)$ 在这个一般框架中为真。因为，如果 V 是任意一个为命题字母指派 $\mathbf{W}$ 中集合的赋值，使得 $\langle\mathbf{F},\ V\rangle\models LM\top[w]$，那么 w 一定是 $\omega+1$。因为所有其他的世界都以死点 0 为一个 R-后继。因此，只需证明 $\langle\mathbf{F},\ V\rangle\models L(Lp\rightarrow p)\rightarrow p[w]$ 就行了，ω 是 $\omega+1$ 仅有的一个 R-后继。于是，如果 $\langle\mathbf{F},\ V\rangle\models L(Lp\rightarrow p)[w]$，则 $\langle\mathbf{F},\ V\rangle\models Lp\rightarrow p\ [0]$，从而有 $\langle\mathbf{F},\ V\rangle\models p[0]$（因为 Lp 在任意一个死点处都为真）。但是另一方面，p 在 1 所有 R-后继处为真。因而，$\langle\mathbf{F},\ V\rangle\models Lp[1]$。此外，$L(Lp\rightarrow p)$ 在 ω 处为真也蕴涵着 $\langle\mathbf{F},\ V\rangle\models Lp\rightarrow p[1]$，从而有 $\langle\mathbf{F},\ V\rangle\models p[1]$。继续对 2 等等做这样的讨论，我们就成功地证得，各个自然数都属于 $V(p)$。由此可知，

$V(p)$是余有穷的。那么，由于 $V(p)\in\mathbf{W}$，这也就蕴涵着 $\omega\in V(p)$。 ■

当然，据第 1 章中提到的托马森的结果可知，这些不完全性现象的一般背景是清楚的：$\models_f$ 本质上是一个（不可公理化的）二阶后承概念。一般框架的引入以亨金引进一般模型的同样方式放宽了这一概念，产生了一个公理化的（弱的）二阶后承概念[33]。

更密切地考察［67］将表明，模态完全性定理决不可以定义 6.4 的那种抽象方式来表述。

定义 6.7　一个模态公式集 Σ 为*对于框架类* $\mathbf{K}$ *是完全的*，是指对于所有的模态公式 φ，$\varphi\in ML(\Sigma)$，当且仅当，$\varphi\in Th_{mod}(\mathbf{K})$（即 $\forall\mathbf{F}\in\mathbf{K}$：$\mathbf{F}\models\varphi$）。

例如，*S*5 对于由所有以一个等价关系为其择代关系的框架所组成的框架类是完全的。但是，它对于由所有以其个体域上全关系（即 $\forall x\forall yRxy$）为择代关系的框架所组成的类也是完全的。这个加强的结论可以从生成定理（引理 2. 11）推出：如果 φ 在一个框架 $\mathbf{F}=\langle W, R\rangle$ 中的 w 处为假，这里 R 是一个等价关系，那么它也在 TC（$\mathbf{F}$，w）中为假，这框架的个体域是 w 的 R-等价类；而且，在那个等价类上，R 是全关系。不过注意，据同一个生成定理，$\forall x\forall yRxy$ 被证明为是不可由 *S*5（或者任何其他模态公式集）来定义的。

如果 Σ 对于任意一个框架类完全，那么它对于 $FR(\Sigma)$ 也完全，即它在定义 6. 4 的意义下完全。但是定义 6. 7 中给定的那个表述也使人想起另一个观点：给定一个类 $\mathbf{K}$ 并找出模态逻辑 $Th_{mod}(\mathbf{K})$ 的递归公理化（任意一个这样的公理化对于 $\mathbf{K}$ 将是完全的）。注意，如果 $\mathbf{K}$ 是*初等的*（比方说，L_0-语句 α 定义它），那么 $Th_{mod}(\mathbf{K})=\{\varphi\mid\alpha\models\forall xST(\varphi)\}$ 是递归可枚举的，因而（据克雷格定理可知）这个集合有一个递归的模态公理化。

最后，应当要提到一个跟完全性有关的、有用的句法观点，它归于戈德布拉特。对任意一个模态公式集，可以定义一种“*完全闭包*”如下。

定义 6.8　令 Σ 是一个模态公式集。$C(\Sigma)$ 是指集合 $Th_{mod}(FR(\Sigma))$。

$\Sigma\subseteq C(\Sigma)$ 是不足道的，但它的逆却是比较有意思的。事实上，某个计算表明，运算 C 的不动点恰好是那个完全的模态逻辑！而且，$C(\Sigma)$ 还是包含 Σ 的最小的完全模态逻辑。正如布洛克在最近的论著中所表明的那样，存在甚至多个不相同的不可数模态逻辑，它们拥有同一个完全闭包。

由完全集组成的某些特殊的类如下。

定义 6.9　Σ 为*一般完全的*，记成 $\Sigma\in GC$，是指对任意一个包含 Σ 的模态逻辑 Δ 和任意一个模态公式 φ，$\varphi\in\Delta$，当且仅当，对所有满足 $\mathbf{F}\models\Sigma$ 和 $\langle\mathbf{F}, \mathbf{W}\rangle\models\Delta$ 的一般框架 $\langle\mathbf{F}, \mathbf{W}\rangle$ 都有 $\langle\mathbf{F}, \mathbf{W}\rangle\models\varphi$。

显然，任意一个一般完全的 Σ 都是完全的。一种重要的一般完全集是典

范集。

定义 6.10[24] Σ为典范的，是指对任意一个模态命题语言（无论它的命题字母集是可数的还是不可数的）而言，Σ都在亨金框架 $HF(\Sigma)$ 中成立。

典范性的这一定义并不很精致，因为它依赖于语言。因此，用下述涉及保持性条件的一个定义来替换它。

定义 6.11 Σ为典范的，记成$\Sigma\in CAN$，是指对任意一个满足$\langle \mathbf{F}, \mathbf{W}\rangle \models \Sigma$的描述性一般框架$\langle \mathbf{F}, \mathbf{W}\rangle$都有$\mathbf{F}\models \varphi$。

显然，第二种意义上的典范性蕴涵第一种意义上的典范性（因为亨金一般框架都是描述性的）。仅当定义 6.10 得到某些加强时，上面这个命题的逆才成立[3]。

定义 6.11 意义上的典范性在［30］中被称作“*d*-持久性”。典范集将在第 13 章和第 16 章中再次出现。

最后，定义一个有意思的、由完全集组成的类如下。

定义 6.12 Σ为一阶完全的，记成$\Sigma\in C1$，是指存在一个 L_0-语句集 Δ，使得Σ是对于 $FR(\Delta)$ 完全的。

上面给出的所有定义都可限定到由单个模态公式所组成的类。例如，如果将定义 6.12 改述成“$\varphi\in C1$，是指对某个 L_0-语句 α 而言，对于所有的模态公式 ψ 都有 $\psi\in ML(\{\varphi\})$，当且仅当，$\alpha\models\forall xST(\psi)$”，那么 $\{\varphi\mid\varphi\in C1\}$ 就是一个算术可定义的模态公式类——想必是（参看第 7 章）——它是远不如 $\bar{M}1$ 那么复杂的。

关于 C 的子类的更多的例子，参看第 13 章。

本章的结束部分将勾画这里所引进的（第 3 章中）那些概念之间的某些联系。因为我们关心的是公式集，因此 $\bar{M}1$ 将被取成为 $\{\Sigma\mid$对某个 L_0-语句集 Δ 有 $FR(\Sigma)=FR(\Delta)\}$。

首先是一些明显的包含关系：

（1）$CAN\subseteq GC\subseteq C$；

（2）$\bar{M}1\cap C\subseteq C1$。

［24］中有公式 $MLp\to(ML(p\wedge q)\vee ML(p\wedge\neg q))$［或等值地说，有公式 $ML(p\vee q)\to(MLp\vee MLq)$］，它是在 CAN 中的（因而也在 $C1$ 中），但不在 $\bar{M}1$ 中。换句话说，

（3）$CAN\not\subseteq\bar{M}1$；

（4）$C1\not\subseteq\bar{M}1$。

此外，下述否定性结果也成立。

（5）$C\not\subseteq C1$。

证明：$LF(L(Lp \to p) \to Lp)$ 就是一个反例，它是完全的[67]，但它对于任意一个类 $FR(\Delta)$ 都不是完全的，这里 Δ 是某个 L_0-语句集。假定相反。由于没有一个 n 能使得 $L^n \bot \in \mathrm{ML}(\{LF\})$ 成立（要弄明白这一点，可以考虑任意一个长度大于 n 的有穷线性序：LF 在其中成立，但 $L^n \bot$ 不成立），故而下述公式集将会是有穷可满足的：

$$\Delta \cup \{Rxx_1, Rx_1x_2, \cdots, Rx_{n-1}x_n, \cdots\} \mid n \geqslant 1\}$$
$$\cup \{\forall y(x = y \vee Rxy), \forall x \forall y(x = y \vee Rxy \vee Ryx)\}。$$

据紧致性可知，整个集也将是可满足的，因此，存在一个框架 $\mathbf{F}$ 和 $w \in W$ 使得 $\mathbf{F} \models \Delta$，并且有某条无穷递降的 R-链以 w 为起点。但是，LF 在这样的框架中并不成立：矛盾，因为 $FR(\Delta) \subseteq FR(\Sigma)$。 ■

LF 也提供了一个属于 C 而不属于 CAN 的公式的实例。因为，LF 不对超滤扩充保持（参看第 2 章），而所有的典范模态公式都对超滤扩充保持。

最后一个事实的证明如下。令 $\varphi \in CAN$，并令 $\mathbf{F} \models \varphi$。$SR(\mathbf{F}^+) = \langle ue(\mathbf{F}), \mathbf{W}\rangle$ 是一个使 φ 在其中成立的描述性一般框架（参看第 4 章）。但是另一方面，由于 $\varphi \in CAN$，故而有 $ue(\mathbf{F}) \models \varphi$。我们已证明：

(6) $C \not\subseteq CAN$。

下面的是不如 (1) 和 (2) 那么明显的一些包含命题。

(7) $C1 \subseteq GC$。

证明：参看 [61] [稍微修改一下莫蒂默 (M. Mortimer) 的证明就行]。

(8) $\bar{M}1 \cap C \subseteq CAN$。

证明：参看 [24]。这个包含命题将在第 16 章中证明。 ■

特别有意思的是 CAN 和 $C1$ 之间的关系。由 [24] 中法因的证明可知，如果就某个由对不相交并保持的 L_0-语句所组成的集合 Δ 而言，Σ 对于 $FR(\Delta)$ 完全，那么 Σ 是典范的。利用定理 8.9 的证明的一个修正，在 [11] 中证得

(9) $C1 \subseteq CAN$。

至于其逆，我们冒险做这样一个猜测：

(10) $CAN \not\subseteq C1$。

最后，$\bar{M}1$ 和 C 之间的联系远不是那么清晰[11]：

(11) $\bar{M}1 \not\subseteq C$；

(12) $C \not\subseteq \bar{M}1$；

(13) 并非所有的模态公式都在 $\bar{M}1 \cup C$ 中。

(11) 的证明：参看上面给出的那个不完全的模态逻辑，它定义 $FR(p \leftrightarrow Lp)$，即 $FR(\forall x \forall y(Rxy \leftrightarrow x = y))$。

（12）的证明：LF 是一个反例：它在 C 中，但（正如第 3 章中所证明的）它不在 $\overline{M}1$ 中，因为关系性质“R 的传递性 + R 的逆的良基性”不是一阶可定义的。

（13）的证明：这结论的一个实例是在［13］中找到的：

$$\{L(L(p\to Lp)\to LLp)\to p, Lp\to p\}$$

是不完全的并且不是一阶可定义的（第 1 章中的托马森公式是另一个实例，但远为复杂得多的。对于 $\overline{M}1\cap C$ 还没有令人满意的刻画（不过我们将在第 13 章中试图探讨这个问题））。

第二部分

模态公式的一阶可定义性

7 局部的和全局的一阶可定性

首先，让我们回想一下来自于第 3 章的某些定义和结果。在定义 3.10 中，$E(\varphi,\ \alpha)$被定义为在一个模态公式 φ 和一个带有一个自由变项的 L_0-公式 α 之间成立，是指有 $\forall \mathbf{F}(=\langle W,R\rangle)\ \forall w\in W(\mathbf{F}\models\varphi[w]\Leftrightarrow\mathbf{F}\models\alpha[w])$。这就是局部等价的关系。在 φ 和一个 L_0-语句 α 之间还存在一个全局等价的关系 $\bar{E}$，它成立是指 $\forall \mathbf{F}(\mathbf{F}\models\varphi\Leftrightarrow\mathbf{F}\models\alpha)$。要注意的是，如果 $E(\varphi,\ \alpha)$，这里 α 有自由变项 x，那么 $\bar{E}(\varphi,\ \forall x\alpha)$。相应于这些关系，对于模态公式存在有两个一阶可定义性概念；一个局部的（$M1=\{\varphi\mid$ 对某个 α，$E(\varphi,\ \alpha)\}$）和一个全局的（$\bar{M}1=\{\varphi\mid$ 对某个 α，$\bar{E}(\varphi,\ \alpha)\}$）。从上述 E 和 $\bar{E}$ 之间的联系可知，$M1\subseteq\bar{M}1$。不过，下面将证明 $\bar{M}1\not\subseteq M1$。

是局部的还是全局的概念更有吸引力，依赖于我们对语义的偏爱而定。例如，对于那些用带特指的“现实世界”的框架来工作的人（就像克里普克自己起先所做的），局部的概念就较为可取。从技术观点来说，二者都有用处。当用到模型论时，全局的概念是较易处理而又精致的，局部的概念较易适用于句法研究（参看第 9 章）。

当我们所考虑的是模态公式集而非单个的模态公式时，情况就改变了。上述定义很容易推广到集合 Σ，Δ（而不是 φ，α）。对于那些在附加前缀 L 的做法下封闭的集合（如第 5 章中的模态逻辑），引理 3.11 说的是，$\Sigma\in M1$，当且仅当，$\Sigma\in\bar{M}1$［在第 11 章中将证明，在由所有传递的框架组成的类上，$\varphi\in\bar{M}1$，当且仅当，$L\varphi\in M1$。不过，这个结论并不一定成立，若不然，据引理 8.8 可知，如果 $L\varphi\in M1$，则 $\varphi\in M1$。因此，对于所有的 $\varphi\in\bar{M}1$（$L\varphi$ 且因而），将会有 $\varphi\in M1$，即 $\bar{M}1\subseteq M1$：这是假的］。也许有人还考虑“混合”情形，如 φ，Δ；对此我们已有：如果 φ 局部（全局）等价于某个 L_0-公式集 Δ，那么它局部（全局）等价于单个这样的公式。另一种混合情形，L_0-公式 α 等价于某个模态公式集 Σ 的情形，还没有在这里进行过研究。我们能否证明这样一个 α 等价于单个模态公式?

定理 7.1　$LMLLp \to MMLMp \in \bar{M}1 - M1$。

证明：$LMLLp \to MMLMp \in \bar{M}1$ 这一结论不难由 $\bar{E}$（$LMLLp \to MMLMp$, $\forall x \exists y Rxy$）看出。从右到左的蕴涵是明显的：如果 W 中各个世界都有一个 R-后继，则对于所有的 φ 而言，$L\varphi$ 蕴涵 $M\varphi$。至于另一方向，假定某个 $w \in W$ 没有 R-后继，那么任意一个公式 $L\varphi$ 都将在 w 处为真，并且任意一个公式 $M\varphi$ 都将为假。换句话说，$LMLLp \to MMLMp$ 在 w 处自动地为假。

为了证明 $LMLLp \to MMLMp \notin M1$，我们将给出一个框架 $\mathbf{F} = \langle W, R\rangle$ 和 $w \in W$，使得 $\mathbf{F} \models LMLLp \to MMLMp[w]$。然而，由于 $\mathbf{F}$ 没有一个（包含 W 的某个具体的可数子集的）初等子框架 $\mathbf{F}'$，$\mathbf{F}' \models LMLLp \to MMLMp[w]$。据 L_0 的骆文汉姆－斯科伦定理可知，这意味着它不会等价于一个 L_0-公式。

令 $W = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \cup \{y_n, y_{ni}, y_{nij} \mid n \in IN, i \in \{0,1\}, j \in \{0,1,2\}\} \cup \{z_f, z_{fn} \mid n \in IN, f: IN \to \{0,1\}\}$（这里涉及的记号约定是"$\{x_i, y_j \mid i \in I, j \in J\}$"为"$\{x_i \mid i \in I\} \cup \{y_j \mid j \in J\}$"的缩写，类似地对更长的序列 x_i，y_j，z_k，…和带双重或三重下标的序列也采用这样的缩写）。

令 $R = \{\langle x_1, x_2\rangle, \langle x_2, x_3\rangle, \langle x_3, x_4\rangle\} \cup \{\langle x_2, z_f\rangle, \langle z_f, z_{fn}\rangle, \langle z_{fn}, y_{nf(n)2}\rangle \mid f: IN \to \{0,1\}, n \in IN\} \cup \{\langle x_1, y_n\rangle, \langle y_n, y_{ni}\rangle, \langle y_{ni}, y_{nij}\rangle, \langle y_{ni1}, y_{ni2}\rangle \mid n \in IN, i \in \{0,1\}, j \in \{0,1\}\}$。

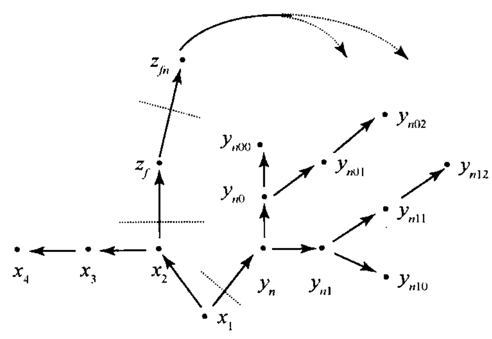


图 7-1

令 V 是 $\mathbf{F}$ 上满足 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models LMLLp[x_1]$ 的赋值。我们将证明 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models MMLMp[x_1]$，从而得到 $\mathbf{F} \models LMLLp \to MMLMp[x_1]$。由于 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models LMLLp[x_1]$，故而对于所有的 $n \in IN$ 有 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models MLLp[y_n]$。因此，对于所有的 $n \in IN$，或是 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models LLp[y_{n0}]$，此时，$\langle \mathbf{F}, V\rangle \models p[y_{n02}]$；或是 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models LLp[y_{n1}]$，此时 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models p[y_{n12}]$。令 f: $IN \to \{0, 1\}$ 对于所有的 $n \in IN$ 都有 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models p[y_{nf(n)2}]$。则对于所有的 $n \in IN$ 都有 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models Mp[z_{fn}]$，因此，有 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models LMp\ [z_f]$，所以又有 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models MMLM\ p[x_1]$。

现在令 $\mathbf{F}'$是 $\mathbf{F}$ 的任意一个其个体域包含 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \cup \{y_n, y_{ni}, y_{nij} \mid n \in IN, i \in \{0, 1\}, j \in \{0, 1, 2\}\}$ 的可数初等子框架。任取一个 $z_f \in W\text{-}W'$ 并取 $V(p) = \{y_{nf(n)2} \mid n \in IN\}$。则 $\langle \mathbf{F}', V\rangle \models LMLLp[x_1]$，因为有$\langle \mathbf{F}', V\rangle \models Lp[x_4]$，$\langle \mathbf{F}', V\rangle \models LLp[x_3]$，$\langle \mathbf{F}', V\rangle \models MLLp[x_2]$，并且还有$\langle \mathbf{F}', V\rangle \models p[y_{nf(n)2}]$，$\langle \mathbf{F}', V\rangle \models Lp[y_{nf(n)1}]$，$\langle \mathbf{F}', V\rangle \models Lp[y_{nf(n)0}]$，$\langle \mathbf{F}', V\rangle \models LLp[y_{nf(n)}]$，$\langle \mathbf{F}', V\rangle \models MLLp[y_n]$。此外，$\langle \mathbf{F}', V\rangle \not\models MMLMp[x_1]$，因为有$\langle \mathbf{F}', V\rangle \not\models Mp[x_4]$，$\langle \mathbf{F}', V\rangle \not\models LMp[x_3]$，并且对于所有的 $i, n \in IN$ 有$\langle \mathbf{F}', V\rangle \not\models Mp[y_{ni0}]$，$\langle \mathbf{F}', V\rangle \not\models LMp[y_{ni}]$，最后对任意一个 $z_g \in W'$，还有$\langle \mathbf{F}', V\rangle \not\models LMp[z_g]$。为了看出这一点，注意 $z_g \neq z_f$，因此 $g \neq f$，并且至少有一个 $n \in IN$ 使得 $g(n) \neq f(n)$。对这样的一个 n，由于$\langle \mathbf{F}', V\rangle \not\models p[y_{ng(n)2}]$，故而有$\langle \mathbf{F}', V\rangle \not\models Mp[z_{gn}]$，从而有$\langle \mathbf{F}', V\rangle \not\models LMp[z_g]$。由此，得到 $\mathbf{F}' \not\models LMLLp \to MMLMp[x_1]$。 ■

现在我们还要给出这一现象的另一个实例（所涉及的公式对后面的论述同样是重要的）。相关的事实如下。

(i) 对于所有的 $\mathbf{F}(=\langle W, R\rangle)$和 $w \in W$，

$$\mathbf{F} \models Lp \to LLp[w] \Leftrightarrow \mathbf{F} \models \forall y(Rxy \to \forall z(Ryz \to Rxz))\ [w]$$

(ii) $LMp \to MLp$ 不在 $M1$ 中（参看第 10 章定理 10.2），

(iii) $(Lp \to LLp) \wedge (LMp \to MLp)$ 在 $\overline{M}1$ 中。

因为，$Lp \to LLp$ 在一个框架上成立，当且仅当，此框架的关系是传递的，由此我们有下述结果。

引理 7.2 对于所有的传递框架 $\mathbf{F}$ 和 $w \in W$，

$$\mathbf{F} \models LMp \to MLp[w] \Leftrightarrow \mathbf{F} \models \exists y(Rxy \wedge \forall z(Ryz \to z = y))\ [w]$$

证明：从右至左的方向显然。对于另一方向，假定 $\mathbf{F} \models \forall y(Rxy \to \exists z(Ryz \wedge z \neq y))\ [w]$，并且引用下述结果到 $TC(\mathbf{F}, w)$ 上。 ■

引理 7.3 (AC) 对任意一个其 R 为传递关系的框架 $\mathbf{F}(=\langle W, R\rangle)$，下述两个陈述是等价的：

(a) $\mathbf{F} \models \forall x \exists y\ (Rxy \wedge x \neq y)$；

(b) 存在一个 $X \subseteq W$ 使得 X 和 $W - X$ 在 $\mathbf{F}$ 中都是*共尾的*（cofinal），即$\forall w \in W\ \exists v \in X\ Rwv$，并且$\forall w \in W\ \exists v \in (W - X)\ Rwv$。

证明：参看 [8]。 ■

定理 7.4 $(Lp \to LLp) \wedge (LMp \to MLp) \in \overline{M}1 - M1$。

证明：这个公式显然属于 $\overline{M}1$：它是由 $\forall x \forall y(Rxy \to \forall z(Ryz \to Rxz)) \wedge \forall x \exists y(Rxy \wedge \forall z(Ryz \to z = y))$ 定义的。为了看出它不属于 $M1$，需要有一个类似于建立定理 7.1 的论证。考虑框架 $\mathbf{F} = \langle W, R\rangle$，其中

$$W=\{x\}\cup\{y_{ni}\mid n\in IN, i\in\{0,1\}\}\cup\{z_f\mid f:IN\to\{0,1\}\},$$
$$R=\{\langle x,y_{ni}\rangle,\langle y_{ni},y_{nj}\rangle,\langle x,z_f\rangle,\langle z_f,y_{nf(n)}\rangle\mid i,j\in\{0,1\},n\in IN,f:IN\to\{0,1\}\}。$$

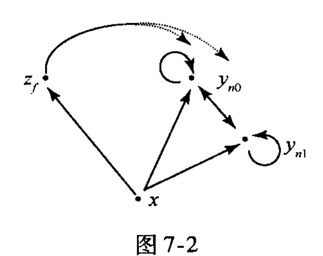


图 7-2

很容易验证，$\mathbf{F}\models Lp\to LLp[x]$。而且，$\mathbf{F}\models LMp\to MLp[x]$。因为，令 V 是 $\mathbf{F}$ 上的任意一个满足 $\langle\mathbf{F}, V\rangle\models LMp[x]$ 的赋值。那么，对各个 n 和 i，有 $\langle\mathbf{F}, V\rangle\models Mp[y_{ni}]$，因而对某个 $i\in\{0, 1\}$，有 $\langle\mathbf{F}, V\rangle\models p[y_{ni}]$。令 f: $IN\to\{0, 1\}$ 是由 $\langle\mathbf{F}, V\rangle\models p[y_{n0}]$ 成立时，取 $f(n)=0$，否则取 $f(n)=1$ 定义的。显然，$\langle\mathbf{F}, V\rangle\models Lp[z_f]$，从而 $\langle\mathbf{F}, V\rangle\models MLp[x]$。

再令 $\mathbf{F}'$ 是 $\mathbf{F}$ 的任意一个包含 x 和所有 y_{ni} 的可数初等子框架。由于 W 中有不可数多个 z_f，故而其中至少有一个（设为 z_g）一定不在 $\mathbf{F}'$ 中。定义 $V(p)$ 为 $\{y_{ng(n)}\mid n\in IN\}$。那么，

(i) $\langle\mathbf{F}', V\rangle\models LMp[x]$，但

(ii) $\langle\mathbf{F}', V\rangle\models\neg MLp[x]$；

因而 $(Lp\to LLp)\wedge(LMp\to MLp)$ 在 $\mathbf{F}'$ 中的 x 处为假（并且这公式不能属于 $M1$）。为了看出 (i) 成立，请注意 Mp 在每一个 y_{ni} 处为真并且在任意一个 $z_f\in W'$ 处也为真。因为，这样的一个 f 将至少在一个 n 处的值是跟 g 的值相等的（否则，f 将会是函数 $1-g$。但是，由于对每一个 z_f 有一个元素"z_{1-f}"（这一在 $\mathbf{F}$ 中成立的性质是 L_0-可表达的，并且也由于 $\mathbf{F}'$ 是 $\mathbf{F}$ 的一个 L_0-初等子框架，故而 z_g 将会在 W' 中，矛盾于所作的假定）。为了看出 (ii) 成立，请注意 Lp 在任意一个 y_{ni} 处都不成立，而且也不在任意一个 $z_f\in W'$ 处成立，因为任意一个这样的 f 至少要在一个主目 n 处的值跟 g 不同。 ■

不过，有一个相关的公式确实是在 $M1$ 中的见引理 7.5。

引理 7.5 $(Lp\to LLp)\wedge L(Lp\to LLp)\wedge(LMp\to MLp)\in M1$。

证明： $E(L(Lp\to LLp),\ \forall y(Rxy\to\forall z(Ryz\to\forall u(Rzu\to Ryu))))$ 成立。于是，若 $\mathbf{F}\models(Lp\to LLp)\wedge L(Lp\to LLp)[w]$，则 $TC(\mathbf{F}, w)$ 是传递的。此外，如果有 $\mathbf{F}\models(LMp\to MLp)[w]$（从而 $TC(\mathbf{F}, w)\models(LMp\to MLp)[w]$），那么根据引理 7.2，$TC(\mathbf{F}, w)\models\exists y(Rxy\wedge\forall z(Ryz\to z=y))[w]$，因而有 $\mathbf{F}\models\exists y(Rxy\wedge\forall z(Ryz\to z=y))[w]$。因此，

$$\varphi = (Lp \to LLp) \wedge L(Lp \to LLp) \wedge (LMp \to MLp)$$

蕴涵

$$\alpha = \forall y(Rxy \to \forall z(Ryz \to Rxz)) \wedge \forall y(Rxy \to \forall z(Ryz \to \forall u(Rzu \to Ryu))) \wedge \exists y(Rxy \wedge \forall z(Ryz \to z = y))$$

逆蕴涵甚至更容易证明。■

上面的结果并不像它们表面上看起来那么简单。它们依赖于选择公理（经由引理7.3），反过来，它们也蕴涵着一些在策梅罗－弗兰克尔集论（ZF）中不可证明的非构造性原则。

引理7.6　对于上述的 φ 和 α，$E(\varphi, \alpha)$ 蕴涵无序对的选择公理。

证明： 令 $\{A_i \mid i \in I\}$ 是由两两不相交的无序对组成的一个集合。$\mathrm{E}(\varphi, \alpha)$ 的下述应用将产生 $\{A_i \mid i \in I\}$ 的一个代表集。在 $\bigcup_{i \in I} A_i$ 外取某个 w，并令 $R = \{\langle x, y\rangle \mid (x = w \ \& \ y \in \bigcup_{i \in I} A_i)$ 或者对于某个 $i \in I$ 有 $x \in A_i \ \& \ y \in A_i\}$，设 $\mathbf{F} = \langle \bigcup_{i \in I} A_i \cup \{w\}, R\rangle$。

$\mathbf{F} \models \forall y(Rxy \to \forall z(Ryz \to Rxz))\ [w]$，并且

$\mathbf{F} \models \forall y(Rxy \to \forall z(Ryz \to \forall u(Rzu \to Ryu)))\ [w]$，因此有

$\mathbf{F} \models (Lp \to LLp) \wedge L(Lp \to LLp)[w]$。

由于 $\mathbf{F} \not\models \exists y(Rxy \wedge \forall z\ (Ryz \to z = y))\ [w]$，故而 $\mathbf{F} \not\models \varphi[w]$，并且，因为 $\mathbf{F} \not\models LMp \to MLp[w]$ 只能是唯一的情形。于是，如果 V 是 $\mathbf{F}$ 上任意一个使得 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models LMp[w]$ 和 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \not\models MLp[w]$（即 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models LM\neg p[w]$）的赋值，那么 $V(p) - \{w\}$ 就是所要求的集合，它与各个 A_i 只有一个共同的成员。■

[37] 中表明，无序对的选择公理在 ZF 中不是可证的。对于一个更强的定理，还需要耶克的另一个结果。

引理7.7．（[37]，第96页，问题15）在 ZF 中不可证明这样的结论：无终点的线性序 $\mathbf{F} = \langle W, R\rangle$ 有子集 $X \subset W$，使得 X 和 $W - X$ 在 $\mathbf{F}$ 中都是共尾的。

我们现在来证明

定理7.8　在 ZF 中不可证明 $(Lp \to LLp) \wedge (LMp \to MLp)$ 属于 $M1$。

证明： 假定这个事实可以在 ZF 中证明。从这一点出发，我们就能在该理论内进行讨论，并证得引理7.7中提到的原则同样也会是可证的。令 $\mathbf{F} = \langle W, R\rangle$ 是任意一个无终点的线性序，使得没有一个 $X \subset W$ 能使 X 和 $W - X$ 二者都共尾于 $\mathbf{F}$ 中。那么 $\mathbf{F} \models LMp \to MLp$，并且由于 R 是传递的，$\mathbf{F} \models (Lp \to LLp) \wedge (LMp \to MLp)$。令 L_0-语句 β 表达 R 为无终点的线性序这一事实。令 α 是一个跟我们的模态公式等价的 L_0-语句。显然，$\mathbf{F} \models \beta \wedge \alpha$，因此 $\beta \wedge \alpha$ 是一个可满足的 L_0-语句，它有一个可数模型 $\mathbf{F}_1$。

在前面定理（如定理7.1）的证明中，用到了骆文汉姆－斯科伦定理的一个强的版本，断定无穷框架有适当的可数初等子结构。不过在这里，我们用骆文汉姆－斯科伦定理的一个弱的版本就够了，也就是断定每一个有模型的 L_0-语句一定有可数模型。后一断定在 *ZF* 中是可证的！直接利用贝特表列或者亨金技术构造一个可数模型。注意，在这样做的时候，不必诉诸非构造性原则，如柯尼希引理（Konig's Lemma）或者素理想定理（Prime Ideal Theorem）；由于我们正在处理的是一个可数语言，而它的公式都是良序地构造起来的（有些教科书作者即使在可数情形下，为了叙述精雅也常常利用诸如此类的非构造原则；但是，严格说来，这样的叙述是容易引起误解的。参看［5］，论题3）。因此，$\mathbf{F}_1$ 是一个无终点的可数线性序，$LMp \to MLp$ 在其中成立。但这是一个矛盾；因为，在这样一个可数序中，（利用 W_1 的某个枚举）可定义一个 $X \subset W_1$，使得 X 和 $W_1 - X$ 二者在 $\mathbf{F}_1$ 中都是共尾的；这意味着 $LMp \to MLp$ 可以为假。■

某些术语上的说明也许在这里是有帮助的。*ZF* 强得足以为讨论模态逻辑的语义问题提供工具。如何形式化有关框架的元言论是明显的，同样对模态语言也是如此。单个模态公式可以利用某种“哥德尔编码”来获得集论“专名”，而且这一切都将存在于一个自然定义的“模态公式”类中。诸如 $M1$ 的成员等概念也都获得一个明显的、派生的集论表述。

有时，一个纯算术表述优于一个集论表述。例如，当说到一个模态公式集为“算术不可定义的”时应当认为这是指：没有一个算术公式 α 能使等价命题 $IN \models \alpha(\ulcorner\varphi\urcorner) \Leftrightarrow \varphi \in \Sigma$ 对于所有的模态公式 φ 都成立（$\ulcorner\varphi\urcorner$ 则是 φ 的某个数字哥德尔编码）。但是，当然，所有这一切也都可在集论语言中表达出来。在此情形下，常用的约定是把那些 *ZF*-公式叫做“算术的”，它们所有的量词都相对化到 V_ω（即累积系列中的第一个无穷层，它相当像 *IN*）。注意，以上所说的模态公式的“专名”将属于 V_ω。因此，例如，若存在一个算术的 *ZF*-公式 $\alpha(x)$ 使得 $ZF \vdash$“对于所有的模态公式 φ，$\varphi \in \Sigma$，当且仅当，$\alpha(\varphi)$”，则在 *ZF* 中可定义的模态公式集 Σ 就可被说成为是“在 *ZF* 中是可证算术的（provably arithmetical）”。

推论 7.9 $\overline{M}1$ 在 *ZF* 中不是可证算术的。

证明：假定有某个算术的 *ZF*-公式 $\alpha(x)$ 使得 $ZF \vdash$“对于所有的模态公式 φ，$\varphi \in \overline{M}1$，当且仅当，$\alpha(\varphi)$”。由于 $ZF + AC \vdash$“$(Lp \to LLp) \wedge (LMp \to MLp) \in \overline{M}1$”（由上面的讨论而得），由此可知算术（！）陈述 α(“$(Lp \to LLp) \wedge (LMp \to MLp)$”）在 $ZF + AC$ 中可证。而相对于算术陈述而言 $ZF + AC$ 在 *ZF* 上是保守的，因而有 $ZF \vdash \alpha$(“$(Lp \to LLp) \wedge (LMp \to MLp)$”)。如此一来，$ZF \vdash$“$(Lp \to LLp) \wedge (LMp \to MLp) \in \overline{M}1$”；跟定理7.8相矛盾。■

可以为 *M*1 证明一个类似的结果。不过，限制于“可证算术的”则使这些结果相当弱。一般而言，对于全称二阶语句的情形有一个更令人满意的答案。称这样一个二阶语句为一阶可定义的，是指存在一个（仅含有来自于该二阶语句的一阶参变元的）一阶语句，在由所有标准模型所组成的类上逻辑等值于它。在第 17 章中，由所有一阶可定义的全称二阶语句所组成的类被证明为是算术不可定义的。

8 一阶可定义性的模型论刻画

一个框架类为 L_0-初等的，是说它由单个 L_0-句子定义；称它为 L_0-Δ-初等的，是说它由一个（可能无穷的）L_0-句子集定义；称它为 L_0-Σ-初等的，是说它是 L_0-初等类的一个并集；最后，称它为 L_0-ΣΔ-初等的，是说它是L_0-Δ-初等框架类的一个并集。众所周知，一个框架类为 L_0-ΣΔ-初等的，当且仅当，它对 L_0-初等等价封闭。因此，这个谱系并不能延伸至 L_0-ΣΔ-初等类之外。因此，我们得到如下图示：

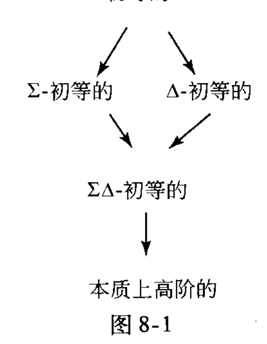


图 8-1

对于由全称二阶句子定义的框架类，情况就简化了。如果一个 L_0-Δ-初等类由这样一个句子定义，那么它是 L_0-初等的（用一个紧致性论证容易证明）。类似地，L_0-ΣΔ-初等类坍塌成 L_0-Σ-初等类：

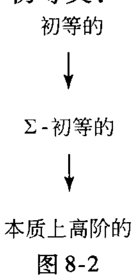


图 8-2

对于当作一种特殊的全称二阶句子来考虑的模态公式（参见第 3 章），还可以有进一步的归约：任何由一个模态公式定义的 L_0-Σ-初等框架类都是 L_0-初等的。因此，只剩下两种可能：一个模态公式要么是 L_0-初等的，要么不是 L_0-$\Sigma\Delta$-初等的。对于由模态公式集定义的框架类，出现一种新的可能性：这些类是 L_0-Δ-初等的，却不是 L_0-初等的。我们现在探索这个方向的形式结果。

引理 8.1（戈德布拉特）　框架族 $\{\mathbf{F}_i \mid i \in I\}$ 的任何超积 $\prod_U \mathbf{F}_i$ 同构于超幂 $\prod_U \Sigma\{\mathbf{F}_i \mid i \in I\}$ 的一个生成子框架。

证明： 把 f_U 映成 $(\langle i, f(i)\rangle_{i\in I})_U$ 的那个明显的映射就是所要求的同构。 ■

推论 8.2　任何对生成子框架、不相交并、同构象和超幂都封闭的框架类，对超积也封闭。

推论 8.3　任何对生成子框架和不相交并都封闭的 L_0-$\Sigma\Delta$-初等框架类都是 L_0-Δ-初等的。

证明： 令 $\mathbf{K}$ 是这样的类。由于 $\mathbf{K}$ 是 L_0-$\Sigma\Delta$-初等的，因而它对 L_0-初等等价封闭，从而对同构象和超幂都封闭（根据沃斯定理，超幂都是 L_0-初等等价于它们的基础结构的）。因此，$\mathbf{K}$ 对超积封闭，并且根据著名的模型论结果[17]，任何对 L_0-初等等价和超积都封闭的框架类都是 L_0-Δ-初等的。 ■

推论 8.4　对于任何模态公式集 Σ，如果 $FR(\Sigma)$ 是 L_0-$\Sigma\Delta$-初等的，那么它是 L_0-Δ-初等的。

推论 8.5　对于任何模态公式 φ，如果 $FR(\varphi)$ 是 L_0-$\Sigma\Delta$-初等的，那么它是 L_0-初等的。

证明： 利用 8.4 和这样的事实：对于任全称二阶句子，L_0-Δ-初等蕴涵 L_0-初等。 ■

定理 8.6　一个模态公式属于 $\overline{M}1$，当且仅当，它对 L_0-初等等价保持，当且仅当，它对超幂保持。

证明： 如果 $\varphi \in \overline{M}1$，则它显然对 L_0-初等等价保持。如果 φ 对 L_0-初等等价保持，那么它对超幂保持。最后，为了完成这个当且仅当命题的证明，如果 φ 对超幂保持，那么根据推论 8.2，$FR(\varphi)$ 对超积封闭。而且，$FR(\varphi)$ 的补由一个特称的二阶句子［等值于 $\forall x \forall P_1 \cdots \forall P_n ST(\varphi)$ 的否定］定义，因而对超积封闭（参见［17］，定理 4.1.14）。$FR(\varphi)$ 与它的补类都对同构象封闭，所以，根据凯斯勒对初等类的著名刻画，$FR(\varphi)$ 是 L_0-初等的。 ■

定理 8.6 并不对所有全称二阶句子都成立，［戴德金（J. W. R. Dedekind）］

有穷性的例子就是证据。它对超幂保持，但不是初等的。实际上，关于全称二阶句子的情形如下。根据引理 3. 12，所有这一类形如 $\forall P_1 \cdots \forall P_n \forall x_1 \cdots \forall x_m \varphi$ 的句子都对超积保持，这里 φ 是由 L_0-公式和 P_1，…，P_n 中的原子公式形成的布尔组合。在第 17 章中会证明，那些形如 $\forall P_1 \cdots \forall P_n \exists x_1 \cdots \exists x_m \varphi$（$\varphi$ 如前）的句子都对超幂保持，但不一定对超积保持。最后，任何仅以 R 为一阶谓词参数的全称二阶句子都逻辑等值于形如 $\forall P_1 \cdots \forall P_n \exists x_1 \cdots \exists x_m \forall y_1 \cdots \forall y_s \varphi$（$\varphi$ 依旧如前）的句子。所以，上述结果是最好的可能结果。那么很显然，这样的保持结果并不给出多少关于哪些模态公式一阶可定义的*句法*信息。为此，必须发展适当的句法方法（参见第 9 章）。

对于*局部*可定义性，可以证明，上述结果的一种稍复杂的版本成立。

定理 8. 7 一个模态公式 φ 在 $M1$ 中，当且仅当，对所有框架 $\mathbf{F}$ 和集合 I，使得对各个 $i \in I$ 有 $w_i \in W$，以及对 I 上的所有超滤 U，

$$\forall i \in I\ \mathbf{F} \models \varphi[w_i] \text{蕴涵} \prod_U \mathbf{F} \models \varphi[(\langle w_i \rangle_{i \in I})_U]。$$

证明： 如果 φ 在 $M1$ 中，比如说它局部等值于 α，那么 $\forall i \in I\ \mathbf{F} \models \varphi[w_i]$ 蕴涵 $\forall i \in I\ \mathbf{F} \models \alpha[w_i]$。根据沃斯定理，$\prod_U \mathbf{F} \models \alpha[(\langle w_i \rangle_{i \in I})_U]$，从而 φ 也同样在那个世界为真。

对于其逆方向的证明，增加一个个体常项 c 到 L_0 中；结果产生 $L_0(c)$。考虑由所有在 $\mathbf{F} \models \varphi[w]$ 的意义下为 φ 的模型的 $L_0(c)$ -结构 $\langle \mathbf{F}, w \rangle$ 所组成的类 $\mathbf{K}$。

（i）$\mathbf{K}$ 对超积封闭。因为，考虑任何集合 $\{\langle \mathbf{F}_i, w_i \rangle \mid i \in I\} \subseteq \mathbf{K}$ 和 I 上任意一个超滤 U。定义 $\mathbf{F}'$ 为框架 $\sum\{\mathbf{F}_i \mid i \in I\}$。显然，根据推论 2. 15，$\langle \mathbf{F}', w_i \rangle$ 是 φ 的模型。因此，根据假设，$\langle \prod_U \mathbf{F}', (\langle w_i \rangle_{i \in I})_U \rangle$ 是 φ 的模型。所以 $\prod_U \{\langle \mathbf{F}_i, w_i \rangle \mid i \in I\} = \langle \prod_U \{\mathbf{F}_i \mid i \in I\}, (\langle w_i \rangle_{i \in I})_U \rangle$ 也是 φ 的模型；$\prod_U \{\mathbf{F}_i \mid i \in I\}$ 是 $\prod_U \mathbf{F}'$ 的生成子框架（参见引理 11. 1）。

（ii）利用像上面有关特称二阶句子的标准论证，$\mathbf{K}$ 的补类也对超积封闭。

由（i）和（ii）——以及显然对同构象封闭——可得 $\mathbf{K}$ 在 $L_0(c)$ 中是初等的（再次利用凯斯勒定理）。这就产生一个在结构 $\langle \mathbf{F}, w \rangle$ 所形成的类上等值于 φ 的 $L_0(c)$ - 句子 $\alpha(c)$，这不过正好是 $\alpha(x)$ 在这个框架类上局部一阶等价于 φ 的另一种说法而已。■

这个定理用在我们能为下述引理找到的唯一的证明中。

引理 8. 8 对于任意的模态公式 φ，$\varphi \in M1$，当且仅当，$L\varphi \in M1$。

证明： 从左至右的方向是容易证明的。如果 $E(\varphi, \alpha)$，其中 $\alpha = \alpha(x)$，那么对某个不在 α 中出现的变项 y 有 $E(L\varphi, \forall x(Ryx \to \alpha))$。因为，$\mathbf{F} \models L\varphi[w]$，当且仅当，对所有 v 使得 Rwv 有 $\mathbf{F} \models \varphi[v]$。

另一方向，如果 $\varphi \notin M1$，根据定理 8.7，存在 $\mathbf{F}=\langle W, R\rangle$，$I$，$\{w_i \mid i \in I\}$ 和 U，使得对各个 $i \in I$ 有 $\mathbf{F} \models \varphi[w_i]$ 而 $\prod_U \mathbf{F} \not\models \varphi[(\langle w_i\rangle_{i\in I})_U]$。在 $\prod_U \mathbf{F}$ 的论域之外取某个 v，并令 $\mathbf{F}_i$ 为框架 $\langle W \cup \{v\}, R \cup \{\langle v, w_i\rangle\}\rangle$。由于 $\mathbf{F} \models \varphi[w_i]$，所以，$\mathbf{F}_i \models \varphi[w_i]$，并且 $\mathbf{F}_i \models L\varphi[v]$。我们来证明 $\prod_U \mathbf{F}_i \not\models L\varphi[(\langle v\rangle_{i\in I})_U]$，从而证明 $L\varphi \notin M1$。

对于各个 $i \in I$ 有 $\mathbf{F}_i \models \forall x\ (Rx_1x \leftrightarrow x = x_2)\ [v, w_i]$，从而根据沃斯定理得 $\prod_U \mathbf{F}_i \models \forall x(Rx_1x \leftrightarrow x = x_2)\ [\ (\langle v\rangle_{i\in I})_U,\ (\langle w_i\rangle_{i\in I})_U]$。因此，$(\langle v\rangle_{i\in I})_U$ 在 $\prod_U \mathbf{F}_i$ 中恰好有一个 R-后继，也就是 $(\langle w_i\rangle_{i\in I})_U$。显然，$\mathbf{F} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathbf{F}_i$，因而 $\prod_U \mathbf{F} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \prod_U F_i$。这是下述一般性（在比如引理 8.1 的证明中使用的）事实的实例：

如果对于所有的 $i \in I$ 有 $F_i \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathbf{F}'_i$，并且 U 是 I 上的一个超滤，那么 $\prod_U \mathbf{F}_i \underset{\rightarrow}{\subseteq} \prod_U \mathbf{F}'_i$。

（这个事实的证明是直截了当的）现在令 V 是 $\prod_U \mathbf{F}$ 上的任何使 $\langle \prod_U \mathbf{F}, V\rangle \models \neg\varphi[(\langle w_i\rangle_{i\in I})_U]$ 成立的赋值。V 也是 $\prod_U \mathbf{F}_i$ 上的赋值，据引理 2.11（“生成定理”），$\langle \prod_U \mathbf{F}_i, V\rangle \models \neg\varphi[(\langle w_i\rangle_{i\in I})_U]$。这蕴涵 $\langle \prod_U \mathbf{F}_i, V\rangle \models \neg L\varphi[(\langle v\rangle_{i\in I})_U]$。

■

迄今为止，只利用了对生成子框架，不相交并和初等等价保持等。这里有一个涉及第二章中其余两个主要概念的模型论结果。

定理 8.9　如果一个框架类对初等等价和 p-态射像封闭，那么它也对超滤扩充封闭。

证明： 将要证明的是，对任何框架 $\mathbf{F}$，$ue(\mathbf{F})$ 是某个初等等价于 $\mathbf{F}$ 的框架 $\mathbf{F}'$ 的 p-态射像。令 $\mathbf{F}=\langle W, R\rangle$。对每个 $X \subseteq W$，附加一个不同的一元谓词常项 c_X 到 L_0 中。按一种明显的方式将 $\mathbf{F}$ 膨胀为该语言的结构 $\mathbf{F}_1$。利用熟悉的模型论构造，取 $\mathbf{F}_1$ 的一个初等扩张 $\mathbf{M}=\langle \mathbf{F}', \langle c'_X\rangle_{X\subseteq W}\rangle$，使之相对于由至多含 W' 的一个参数的公式所组成的公式集是饱和的（注意 $\mathbf{F}'$ 初等等价于 $\mathbf{F}$）。对所有的 $w \in W'$，$f(w)=\{X \subseteq W \mid w \in c'_X\}$ 所定义的映射 f 是从 $\mathbf{F}'$ 到 $ue(\mathbf{F})$ 上的 p-态射，正如现在将证明的那样。

(i) f 是良定义的。因为，根据等值式 $\forall z(\neg c_X z \leftrightarrow c_{W-X} z)$ 和 $\forall z((c_X z \wedge c_Y z \leftrightarrow c_{X\cap Y} z)$，这两个等值式都在 $\mathbf{F}_1$ 中为真，因此，在 $\mathbf{M}$ 中真，所以，$f(w)$ 是 $\mathbf{F}$ 上的超滤。

(ii) f 是到上的。由于 $\mathbf{F}$ 上的任意超滤 U 对应于 $\mathbf{M}$ 上有穷可满足集合 $\{c_X z \mid X \in U\}$；它是由某个 $w \in W'$ 满足的，因为 $\mathbf{M}$ 相对于这样的集合是饱和的。

(iii) 如果 w、$v \in W'$，并且 $R'wv$，那么 $R_{\mathbf{F}} f(w) f(v)$。因为只需证明，如果 $w \in c'_{l(X)}$（这里 l 是第四章中定义的集合论运算），那么 $v \in c'_X$；而且这可以由

$\forall y \forall z((c_{l(X)}y \wedge Ryz) \rightarrow c_X z)$ 在 $\mathbf{F}_1$ 中（且由此在 $\mathbf{M}$ 中）为真得出。

(iv) 如果 $R_{\mathbf{F}}f(w)U$，那么可以找到一个 $v \in W'$ 使得 $R'wv$ 并且 $f(v) = U$。考虑 $\Sigma = \{c_X z \mid X \in U\} \cup \{Rwz\}$。这个集在 $\mathbf{M}$ 中是有穷可满足的。因为，如果 $X_1, \cdots, X_k \in U$，则 $\{c_{X_1}z, \cdots, c_{X_k}z, Rwz\}$ 在 $\mathbf{M}$ 中是可满足的［要明白这一点，首先注意 $X = X_1 \cap \cdots \cap X_k \in U$。假定上述集合不是可满足的。那么下面的公式在 $\mathbf{M}$ 中为真：$\forall y(Rwy \rightarrow \neg c_X y)$，因而 $\forall y(Rwy \rightarrow c_{W-X}y)$。此外，$\forall z(\forall y(Rzy \rightarrow c_{W-X}y) \rightarrow c_{l(W-X)}z)$ 在 $\mathbf{F}_1$ 中成立，因此在 $\mathbf{M}$ 中成立。所以 $w \in c'_{l(W-X)}$ 并且 $l(W-X) \in f(w)$。但是，根据 $R_{\mathbf{F}}$ 的定义，这意味着 $W-X \in U$：矛盾］。由于 $\mathbf{M}$ 相对于 Σ 这样的集合是饱和的，因此，所描述的 v 存在。 ■

这条引理受到［24］的启发。只是下面的例子表明它的逆命题并不成立，这是对［24］中一个例子的改编。

引理 8.10 $ML(p \vee q) \rightarrow M(Lp \vee Lq)$ 对超滤扩充保持，但这个公式不对初等等价保持。

证明： 为了证明这公式对超滤扩充保持，我们证明它在定义 6.1 的意义下是典范的［即它从使它成立的描述的一般框架（参见定义 4.6）过渡到基本（全）框架时是保持的］。因为，如果它在某个框架 $\mathbf{F}$ 中成立（因而在定义 4.5 定义的 $\langle ue(\mathbf{F}), \mathbf{W}\rangle$ 中也成立），它在 $ue(\mathbf{F})$ 中也成立，因为 $\langle ue(\mathbf{F}), \mathbf{W}\rangle$ 是描述的一般框架。因此，假定 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W}\rangle$ 是描述的一般框架使得 $ML(p \vee q) \rightarrow M(Lp \vee Lq)$ 成立。将要证明的是，$\forall x \forall y(Rxy \rightarrow \exists z(Rxz \wedge \forall u(Rzu \rightarrow (Ryu \wedge \forall v(Rzv \rightarrow u = v)))))$ 在 $\mathbf{F}$ 中成立。容易验证，这个 L_0-句子蕴涵 $ML(p \vee q) \rightarrow M(Lp \vee Lq)$。

令 x、$y \in W$ 使得 Rxy。要找到一个 $z \in W$ 使得 (i) Rxz，(ii) $\forall u(Rzu \rightarrow Ryu)$，并且 (iii) $\forall u \forall v(Rzu \rightarrow (Rzv \rightarrow u = v))$。考虑 $\{X \in \mathbf{W} \mid x \in l(X)\} \cup \{l(Y) \mid Y \in \mathbf{W} \,\&\, y \in l(Y)\} \cup \{l(Z) \cup l(W-Z) \mid Z \in \mathbf{W}\}$。只需证明这个集合具有有穷交性质，因为（在那样情形下）可以将它扩张成 $\mathbf{W}$ 上的超滤，使它有满足 (i)、(ii) 和 (iii) 的单点的交集 $\{z\}$（$\langle \mathbf{F}, \mathbf{W}\rangle$ 是描述的，这一点在这里反复使用）。为了进行归谬法证明，假定对某些 $X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_m, Z_1, \cdots, Z_s$，

$$\bigcap_{i=1}^{n} X_i \cap \bigcap_{j=1}^{m} l(Y_j) \cap \bigcap_{k=1}^{s} (l(Z_k) \cup l(W - Z_k)) = \varnothing。$$

令 $X = \bigcap_{i=1}^{n} X_i$ 并令 $Y = \bigcap_{j=1}^{m} Y_j$。显然，$x \in l(X) (= \bigcap_{i=1}^{n} l(X_j))$，并且 $y \in l(Y) (= \bigcap_{j=1}^{m} l(Y_j))$。我们有

$$X \cap l(Y) \cap \bigcap_{k=1}^{s} (l(Z_k) \cup l(W - Z_k)) = \varnothing,$$

或者

$$X \subseteq W - (l(Y) \cap \bigcap_{k=1}^{s} (l(Z_k) \cup l(W - Z_k)))。$$

因此，$l(X) \subseteq l(W - (l(Y) \cap \bigcap_{k=1}^{s} (l(Z_k) \cup l(W - Z_k))))$，并且——由于 $x \in l(X)$——x 属于后一个集合。注意，下述公式在 K 中可以从 $ML(p \vee q) \to M(Lp \vee Lq)$ 推导出来：

$$L\neg\ (Lq \wedge \prod_{k=1}^{s} (Lr_i \vee L\neg\ r_i)) \to L\neg\ Lq \qquad (*)$$

为了弄清这一点，假定 $\neg\ L\neg\ Lq$，即 MLq。那么显然有 $ML((q \wedge r_1) \vee (q \wedge \neg\ r_1))$，因而有 $M(L(q \wedge r_1) \vee L(q \wedge \neg\ r_1))$（所以 $M(Lq \wedge (Lr_1 \vee L\neg\ r_1))$）。关于 r_2 的同样的论证将得到 $M(L(q \wedge r_1 \wedge r_2) \vee L(q \wedge r_1 \wedge \neg\ r_2) \vee L(q \wedge \neg\ r_1 \wedge r_2) \vee L(q \wedge \neg\ r_1 \wedge \neg\ r_2)$（所以 $M(Lq \wedge (Lr_1 \vee L\neg\ r_1) \wedge (Lr_2 \vee L\neg\ r_2))$）。最后，显然可以得到 $M(Lq \wedge \prod_{k=1}^{s} (Lr_i \vee L\neg\ r_i))$。于是，由于 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle \models (*)$，$x \in l(W - l(Y))$，因此，$y \in W - l(Y)$（$Rxy$ 成立！），与 $y \in l(Y)$ 这个事实矛盾。

为了弄清 $ML(p \vee q) \to M(Lp \vee Lq)$ 不对初等等价保持，考虑下述框架 $\mathbf{F} = \langle W, R \rangle$。令 U 是 IN 上的一个自由超滤。W 定义为 $\{IN\} \cup U \cup IN$（W 是不可数的！），R 定义为 $\{\langle IN, X \rangle \mid X \in U\} \cup \{\langle X, n \rangle \mid X \in U \ \&\ n \in X\} \cup \{\langle n, n \rangle \mid n \in IN\}$。很容易验证，我们的公式在所有不同于 IN 的世界成立。于是令 V 为 $\mathbf{F}$ 上的任意赋值使得 $\langle \mathbf{F}, V \rangle \models ML(p \vee q)[IN]$。那么，对某个 $X \in U$，$\langle \mathbf{F}, V \rangle \models L(p \vee q)[X]$，即 $X \subseteq V(p \vee q)$，因而 $V(p \vee q) \cap IN \in U$。由于 $V(p \vee q) \cap IN = (V(p) \cap IN) \cup (V(q) \cap IN)$，这些集合中必有一个属于 U（因为 U 是一个超滤），不妨设 $V(p) \cap IN \in U$。所以，$\langle \mathbf{F}, V \rangle \models Lp[V(p) \cap IN]$，因而 $\langle \mathbf{F}, V \rangle \models MLp[IN]$。

现在，任取 $\mathbf{F}$ 的一个可数的 L_0-初等子框架 $\mathbf{F}'$ 使得 W' 包含 IN 和所有 $n \in IN$。很容易构造出 IN 的不相交的子集 A、B 使得对于 W' 中 U 的所有其余元素 X 有 $X \cap A \neq \varnothing$，并且 $X \cap B \neq \varnothing$。因为，令 X_1，…，X_n，…是这些元素的枚举。定义 $A_0 = \varnothing$，$B_0 = \varnothing$。然后，假定已经定义有穷不相交的集 A_n 和 B_n 使得对各个 i（$1 \leqslant i \leqslant n$）都有 $X_i \cap A_n \neq \varnothing$，$X_i \cap B_n \neq \varnothing$。令 k、l 是 X_{n+1} 中任意两个不在 $A_n \cup B_n$ 中的元素（这样的元素一定存在，因为作为一个自由超滤的元素 X_{n+1} 一定是无穷的）。定义 A_{n+1} 为 $A_n \cup \{k\}$，定义 B_{n+1} 为 $B_n \cup \{l\}$。$A = \cup_n A_n$ 和 $B = \cup_n B_n$ 就是所要求的集合。令 $V(p) = A$ 和 $V(q) = IN - A$，那么 $ML(p \vee q) \to M(Lp \vee Lq)$ 在 IN 处为假。 ■

9 代入方法

$M1$ 比$\overline{M1}$ 更合适作为句法研究的对象。我们现在来进一步研究这个集合。下面的引理列举了它（和 E）的一些简单的性质。

引理 9.1 对于所有的模态公式 φ 和 ψ 以及所有的 L_0-公式 α 和 β，

$E(\varphi,\alpha)\&E(\psi,\beta)\Rightarrow(E\varphi\wedge\psi,\alpha\wedge\beta)$，

$E(\varphi,\alpha)\&E(\psi,\beta)\Rightarrow(E\varphi\vee\psi,\alpha\vee\beta)$，只要 φ 和 ψ 没有共同的命题字母，

对于所有的命题字母 $p,E(\varphi,\alpha)\Leftrightarrow(E([\neg p/p]\varphi,\alpha)$。

证明： 对于所有的模态公式 φ 和 ψ，$\mathbf{F}\models\varphi\wedge\psi[w]$，当且仅当，$\mathbf{F}\models\varphi[w]$，并且 $\mathbf{F}\models\psi[w]$。如果 φ 和 ψ 没有共同的命题字母，则 $\mathbf{F}\models\varphi\vee\psi[w]$，当且仅当，$\mathbf{F}\models\varphi[w]$，或者 $\mathbf{F}\models\psi[w]$。使用引理 2.4 可证明这一点。最后，引理 2.5 蕴涵着：对于所有的命题字母 p，$\mathbf{F}\models\varphi[w]$，当且仅当，$\mathbf{F}\models[\neg p/p]\varphi[w]$。■

推论 9.2 对于所有的模态公式 φ 和 ψ，

$\varphi\in M1\ \&\ \psi\in M1\ \Rightarrow\varphi\wedge\psi\in M1$，

$\varphi\in M1\ \&\ \psi\in M1\ \Rightarrow\varphi\vee\psi\in M1$，只要 φ 和 ψ 没有共同的命题字母，

对于所有的命题字母 p，$\varphi\in M1\Leftrightarrow[\neg p/p]\varphi\in M1$，

$\varphi\in M1\Leftrightarrow L\varphi\in M1$。

证明： 前三个断言由引理 9.1 得出。第四个断言是引理 8.8。■

引理 9.3 下面的蕴涵式并不对所有的模态公式 φ 和 ψ 都成立，

(i) $\varphi\in M1\Rightarrow\neg\varphi\in M1$；

(ii) $\varphi\in M1\Rightarrow M\varphi\in M1$；

(iii) $\varphi\in M1\ \&\ \psi\in M1\Rightarrow(\varphi\to\psi)\in M1$；

(iv) $\varphi\in M1\Rightarrow[\neg p/q]\varphi\in M1$；

(v) $\varphi\wedge\psi\in M1\Rightarrow\varphi\in M1\ \&\ \psi\in M1$。

证明： 第 10 章将证明模态公式 $LMp\to MLp$ 在 $M1$ 之外。此公式等值于 $\neg(LMp\wedge LM\neg p)$，也等值于 $M(Mp\to Lp)$。另一方面，下述公式都是在 $M1$ 中：

LMp，$LM\neg p$，MLp 和 $Mp\to Lp$。它们的 L_0-等价公式分别为$\neg\exists yRxy$，$\neg\exists yRxy$，$\exists y(Rxy\wedge\neg\exists zRyz)$和$\forall z(Rxy\to\forall z(Rxz\to z=y)$。因此，结论（i）、（ii）和（iii）显然成立。

对于（iv），考虑 $\varphi=(Mp\wedge Mq)\to M(p\wedge Mq)$。$\varphi\in M1$，因为 $E(\varphi,\forall y(Rxy\to\forall z(Rxz\to Ryz)))$。但是，$[\neg p/q]\varphi=(Mp\wedge M\neg p)\to M(p\wedge M\neg p)$［它等值于$\neg M(p\wedge M\neg p)\to\neg(Mp\wedge M\neg p)$，即等值于 $L(p\to Lp)\to(Mp\to Lp)$］，不在 $M1$ 中。事实上，如第 10 章引理 1 所示，它甚至不在$\overline{M}1$ 中。

（v）由引理 7.5 可得：$(Lp\to LLp)\wedge L(Lp\to LLp)\wedge(LMp\to MLp)\in M1$，但 $LMp\to MLp\in M1$。注意，这个例子也表明 $M1$ 不对 K-可推导性封闭。■

回顾下面一些有用的概念。$\top$ 和 $\bot$ 分别为用来表示处处为真和处处为假的公式的记号。闭公式是不含命题字母（但可以含有这两个命题常项）的公式。两个新的概念如下。

定义 9.4　一个模态公式 φ *单调于*命题字母 p，是指对所有模型 $\mathbf{M}=\langle W,R,V\rangle$、所有 $w\in W$ 和所有赋值 V'使得 $V'(p)\supset V(p)$（但除 p 外都相同于 V），

如果 $\mathbf{M}\models\varphi[w]$，那么 $\langle W,R,V'\rangle\models\varphi[w]$。

定义 9.5　一个模态公式为*正的*（positive），是指它为仅用 $\top$，$\bot$，命题字母，$\wedge$，$\vee$，L 和 M 构造起来的公式。

任何正公式都单调于它所有的命题字母。似乎有可能利用第 15 章的初等链方法来证得一个逆向的结果。

引理 9.6　任何闭公式都在 $M1$ 中。如果一个模态公式 φ 单调于 p，那么 $\varphi\in M1$，当且仅当，$[\bot/p]\varphi\in M1$。

证明　$\top$ 和 $\bot$ 当作初始符号来处理，我们把下述条款添加到定义 3.1：

$$ST(\top)=\forall x(Rxx\to Rxx)，\text{并且 } ST(\bot)=\forall x\neg(Rxx\to Rxx)。$$

那么对每个闭的模态公式 φ，$ST(\varphi)$ 都将是一个 L_0-公式。

第二个断言是通过观察下述结论来证明的：对于任何单调于 p 的模态公式 φ，对任何框架 $\mathbf{F}$ 和 $w\in W$，都有 $\mathbf{F}\models\varphi[w]$，当且仅当，$\mathbf{F}\models[\bot/p]\varphi[w]$。从左至右的方向是显然，而从右至左则可以由下述事实得出：$\{w\in W\mid\mathbf{F}\models\bot[w]\}=\varnothing$并且 φ 单调于 p。■

来自于第 2 章的另一个相当有用的概念是公式 φ 的*模态度* $d(\varphi)$（参见定义 2.6），用于衡量模态算子在 φ 中嵌套的最大深度。把注意限制于模态度至多为 1 的公式，即模态算子不重叠出现的公式（如[51] 中描述），$M1$ 的刻画就不成问题了。这个结论由下述结果得出。

引理 9.7　如果一个模态公式的模态度至多为 1，那么它属于 $M1$。

证明：情形 1：$d(\varphi)=0$。那么 φ 中不出现模态算子。它是一个命题公式，

而且有两种可能性。要么 φ 是重言式，在这种情况下，$E(\varphi, Rxx \to Rxx)$；要么 φ 不是重言式，此时，$E(\varphi, \neg(Rxx \to Rxx))$，因为使它假的赋值总是存在。

情形 2：$d(\varphi)=1$。用简单的命题有效等值式及模态有效等值式进行的标准演算将表明，任何其全部命题字母为 $p_1, \cdots, p_n$，模态度为 1 的模态公式都等值于形如 $(P \wedge MQ_1 \wedge \cdots \wedge MQ_k) \to (MR_1 \vee \cdots \vee MR_s)$ 的公式的一个合取。这里，$P, Q_1, \cdots, Q_k, R_1, \cdots, R_s$ 是形如$(\neg)p_1 \wedge \cdots \wedge (\neg)p_n$ [其中 $(\neg)\ p_i = p_i$ 或 $\neg p_i$]的状态描述（没有 P、Q 或者 R 的极端情况并没有排除）。只需给出这些蕴涵式的一阶定义：这些定义的合取将定义原来的公式。假定 $Q_1, \cdots, Q_k, R_1, \cdots, R_s$ 之中没有重复出现。我们区别若干情形：

(1) 某个 R_i 是某个 Q_j：α 是 $x=x$。

(2) 没有 R_i 是 Q_j：

(2.1) 所有 2^n 个状态描述都在 $R_1, \cdots, R_s$ 之中：α 是 $\exists yRxy$；

(2.2) 某个状态描述不在 $R_1, \cdots, R_s$ 之中：

(2.2.1) P 在 $R_1, \cdots, R_s$ 之中：

(2.2.1.1) 没有 Q_j：α 是 Rxx；

(2.2.1.2) 有 Q_j：α 是

$$\neg \exists y_1(Rxy_1 \wedge \cdots \wedge \exists y_k(Rxy_k \wedge \prod_{1 \leqslant i \neq j \leqslant k} y_i \neq y_j \wedge \prod_{1 \leqslant i \leqslant k} x \neq y_i \wedge \neg Rxx)\cdots)；$$

(2.2.2) P 不在 $R_1, \cdots, R_s$ 之中；

(2.2.2.1) P 在 $Q_1, \cdots, Q_k$ 之中：α 是

$$\neg \exists y_1(Rxy_1 \wedge \cdots \wedge \exists y_k(Rxy_k \wedge \prod_{1 \leqslant i \neq j \leqslant k} (y_i \neq y_j))\cdots)；$$

(2.2.2.2) P 不在 $Q_1, \cdots, Q_k$ 之中：

(2.2.2.2.1) 没有 Q_j：α 是 $x \neq x$；

(2.2.2.2.2) 有 Q_j：α 是

$$\neg \exists y_1(Rxy_1 \wedge \cdots \wedge \exists y_k(Rxy_k \wedge \prod_{1 \leqslant i \neq j \leqslant k} y_i \neq y_j \wedge \prod_{1 \leqslant i \leqslant k} x \neq y_i)\cdots)。$$

这就列举了全部所有可能的情形：同时，这也是利用模态度为 1 的模态公式定义的一阶关系性质的列举。相关等值公式成立的证明过于冗长，这里不作陈述，读者只需通过一个实例就能理解。 ■

在［13］中还证明了这样的结论：模态度至多为 1 的模态公式相对于以上列举的性质是完全的（参见定义 6.7）。

引理 9.7 也可以利用定理 8.7 中得到的对 $M1$ 的刻画来证明。其想法就是利用下面的事实：如果所考虑的公式能在超积中为假，那么这就是由于 $(\langle w_i \rangle_{i \in I})_U$ "有足够多"互不相同的 R-后继存在。而且这一事实也可由沃斯定

理而转移到 **F** 自身。

为了证明一些适用范围更广的结果，现在必须引进一种新方法，叫做代入方法，其想法大致如下。对于某些模态公式 $\varphi = \varphi(p_1, \cdots, p_n)$，存在 L_0-公式 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ 使得每当 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models \neg \varphi[w]$，那么有 $\mathbf{F} \models \neg [\sigma_1/P_1, \cdots, \sigma_n/P_n] ST(\varphi)[w]$（用公式 σ_i 代入按某种适当方法定义的一元谓词常项 P_i）。

换句话说，L_0-公式 $\varphi^* = [\sigma_1/P_1, \cdots, \sigma_n/P_n]\ ST(\varphi)$ 蕴涵 φ。另一方面，φ 总是蕴涵它的 L_0-代入实例 φ^*。所以，φ 将等值于 φ^*。此外，这一类的等值命题，都可以用下面具体说明的特定形式的模态公式 φ 能行地构造出来。

在构造时，会有两个麻烦。首先，也许会有一些可能的代入（而不是单独一个代入）如 $\sigma_1^1, \cdots, \sigma_n^1, \cdots, \sigma_1^k, \cdots, \sigma_n^k$ 所组成的集合，并且 φ 变成等值于它的 L_0-代入实例的合取。其次，来自域 W 的可能的“参数”也许会起作用。它们是通过在 $ST(\varphi)$ 前面加上一些全称量词而引入的。它们的处理将通过下面叙述的翻译过程来弄明白。

在继续探索实际结果以前，引进一些有用的记号：

$M^i\varphi$ 为 $M\cdots$（i 次）$\cdots M\varphi$ 的缩写

$L^i\varphi$：类上。

（包括 $i=0$ 的情形：例如，$M^0\varphi = \varphi$）

R^0xy 表示 $x = y$

$R^{n+1}xy$ 表示 $\exists z_{n+1}(R^n xz_{n+1} \wedge Rz_{n+1}y)$。

[这里，把 R^1xy 看做 Rxy 而不是 $\exists z_1(x = z_1 \wedge Rz_1y)$ 更为便利]

定理 9.8　如果模态公式 ψ 是正的，并且模态公式 φ 是利用 L^ip（p 是命题字母，$i \in IN$）、$\top$、$\bot$、$\vee$、$\wedge$ 和 M 构造起来的，那么 $\varphi \to \psi \in M1$。

证明：首先，把要证明的断言归结到不涉及“$\vee$”的情形。利用明显的命题等值式和模态等值式，将 φ 改写成仅用形如 L^ip、$\top$、$\bot$、$\wedge$ 和 M 构造起来的公式的析取。然后把 $\varphi \to \psi$ 重写为蕴涵式的合取，这些蕴涵式各有一个析取支为前件公式。

引理 9.6 有助于移除在 $\varphi \to \psi$ 中出现而不在 φ 和 ψ 二者中都出现的命题字母（在某种意义上，这些命题字母对于这个公式并无任何重要的影响），令 p 是这样一个命题字母。如果它在 ψ 中出现，那么 $\varphi \to \psi$ 单调于 p，而且可以用 $\bot$ 代入它。如果它在 φ 中出现，那么可以用 $\top$ 代入它。因为，据推论 9.2，可以考虑 $[\neg p/p](\varphi \to \psi)$ 而不是 $\varphi \to \psi$ 自身 [而且用 $\bot$ 代入 $[\neg p/p](\varphi \to \psi)$ 中的 p，效果同于用 $\top$ 代入 $\varphi \to \psi$ 中的 p]。

考虑某个经由这些操作得到的公式 $\varphi \to \psi$，写出 $ST(\varphi \to \psi)$ 使得任意两个量

词都没有相同的约束变项。在这种方式下，L 和 M 在 $\varphi\to\psi$ 中的各次出现都有 ST（$\varphi\to\psi$）中唯一的约束变项与之对应。从 $ST(\varphi\to\psi)$，为各个命题字母 p 提取 L_0-公式 $CV(p,\varphi)$，凭借在 $ST(\varphi\to\psi)$ 的一种稍加修整的形式中作代入，由此将产生所要求的 L_0-等价公式。

考虑 $ST(\varphi\to\psi)$ 中作为前件出现的公式 $ST(\varphi)$。将所有与 M 在 φ 中的出现对应的特称量词移到公式前面。可以利用将公式变成前束范式的运算做到这一点，因为只有 $\wedge$ 的出现才是“交叉的”。这样就产生 $\exists y_1\cdots\exists y_k\varphi'$。因此，现在可以将 $ST(\varphi\to\psi)$ 写成 $\forall y_1\cdots\forall y_k(\varphi'\to ST(\psi))$。

固定一个不在 $ST(\varphi\to\psi)$ 中出现的变项 u。令 $\bar{p}$ 是 p 在 φ 中的一次出现，$v(\bar{p})$ 是 $ST(\varphi)$ 中的约束变项 y_i，对应于 φ 中其辖域中含有 $\bar{p}$ 的、最内部出现的 M；或者，如果不存在 M 这样的出现，则 $v(\bar{p})=x$。对于使得 $\bar{p}$ 在形如 $L^j p$ 的子公式中出现的最大数 j，令 $CV(\bar{p},\varphi)=R^j v(\bar{p})\ u$。定义 $CV(p,\varphi)$ 为所有公式 $CV(\bar{p},\varphi)$ 所形成的相容析取，这里 $\bar{p}$ 是 p 在 φ 中的一次出现。最后，为了确保公式 $CV(p,\varphi)$ 和 $\forall y_1\cdots\forall y_k(\varphi'\to ST(\psi))$ 没有共同的约束变项，如有必要，就进行字母变换。

$\varphi\to\psi$ 的 L_0-等价公式 $s(\varphi\to\psi)$ 是由代入得到的：对于各个命题字母 p 和相应的一元谓词常项 P，以及每个个体变项 z，用 $[z/u]CV(p,\varphi)$ 代入 $\forall y_1\cdots\forall y_k(\varphi'\to ST(\psi))$ 中的 Pz。

紧随于此证明之后，有几个实例来说明上述过程。余下要证明的是，对于所有的框架 $\mathbf{F}$ 和所有的 $w\in W$，$\mathbf{F}\models\varphi\to\psi[w]$，当且仅当，$\mathbf{F}\models s(\varphi\to\psi)[w]$。

一个方向是立即可得的。如果 $\mathbf{F}\models\varphi\to\psi\ [w]$，则对出现于 $\varphi\to\psi$ 中的命题字母 $p_1,\cdots,p_n$，

$\mathbf{F}\models\forall P_1\cdots\forall P_n ST(\varphi\to\psi)\ [w]$，因而有

$\mathbf{F}\models\forall P_1\cdots\forall P_n\forall y_1\cdots\forall y_k(\varphi'\to ST(\psi))\ [w]$，或者

$\mathbf{F}\models\forall y_1\cdots\forall y_k\forall P_1\cdots\forall P_n(\varphi'\to ST(\psi))\ [w]$。

$s(\varphi\to\psi)$ 是后一个公式的代入实例，因此 $\mathbf{F}\models s(\varphi\to\psi)[w]$（参照定理 9.10 下面所作的说明）。

至于相反的方向，假定对某个赋值 V，$\langle\mathbf{F},V\rangle\models\varphi[w]$。要证明的是 $\langle\mathbf{F},V\rangle\models\psi[w]$，那么显然有 $\langle\mathbf{F},V\rangle\models\exists y_1\cdots\exists y_k\varphi'[w]$。所以对某些 $w_1,\cdots,w_k\in W$，$\langle\mathbf{F},V\rangle\models\varphi'[w,w_1,\cdots,w_k]$，其中对每个 $i(1\leqslant i\leqslant k)$，$w_i$ 指派给 y_i。现在定义赋值 V'：对于每个命题字母 p，$V'(p)=\{v\in W\mid\mathbf{F}\models CV(p,\varphi)[w,w_1,\cdots,w_k,v]\}$。这里，$v$ 指派给 u。

然后可以证明，对于所有的命题字母 p，$V'(p)\subseteq V(p)$，并且 $\langle\mathbf{F},V'\rangle\models\varphi'[w,$

$w_1,\cdots,w_k]$。

这一点的详细证明并不产生任何新见识，因为这两个断言都是公式 $CV(p,\varphi)$ 的定义的明显结论。

用公式 $CV(p,\varphi)$ 代入 φ' 中的那些 P：这将给出公式 φ''。由于 $\langle \mathbf{F}, V'\rangle \models \varphi'[w, w_1, \cdots, w_k]$，因此，$\mathbf{F} \models \varphi''[w, w_1, \cdots, w_k]$。然后由 $\mathbf{F} \models s(\varphi \to \psi)[w]$ 可以得出 $\mathbf{F} \models \psi'[w, w_1, \cdots, w_k]$，这里 ψ' 是同一个代入从 $ST(\psi)$ 得到的。这等于说 $\langle \mathbf{F}, V'\rangle \models ST(\psi)[w]$，因而，利用对于所有的命题字母 p 有 $V'(p) \subseteq V(p)$ 和 ψ 单调于它所有的命题字母这两个事实，就可看到 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models ST(\psi)[w]$，即 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models \psi[w]$。 ■

下述 7 个例子都是众所周知的模态公理。各例中所涉及的模态逻辑都在括号中注明。

(1) $Lp \to p(T)$

ST：$\forall y(Rxy \to Py) \to Px$

$CV(p, Lp)$：Rxu

s：$\forall y(Rxy \to Rxy) \to Rxx$，或者简化成 Rxx。

(2) $Lp \to LLp(S4)$

ST：$\forall y(Rxy \to Py) \to \forall z(Rxz \to \forall v(Rzv \to Pv))$

$CV(p, Lp)$：Rxu

s 在类似于上面那样的简化后成为 $\forall z(Rxz \to \forall v(Rzv \to Rxv))$。

(3) $p \to LMp(B)$

ST：$Px \to \forall y(Rxy \to \exists z(Ryz \wedge Pz))$

$CV(p, p)$：$x = u$

s：$x = x \to \forall y(Rxy \to \exists z(Ryz \wedge x = z))$，或者简化成 $\forall y(Rxy \to Ryx)$。

(4) $MLp \to Lp(S5)$

ST：$\exists y(Rxy \wedge \forall z\ (Ryz \to Pz)) \to \forall v(Rxv \to Pv)$

$CV\ (p, MLp)$：Ryu

s：$\forall y(Rxy \wedge \forall z(Ryz \to Ryz)) \to \forall v(Rxv \to Ryv))$，或者简化成 $\forall y(Rxy \to \forall v\ (Rxv \to Ryv))$。

(5) $MLp \to LMp$ (**S4.2**)

类似地处理，简化后得到 $\forall y(Rxy \to \forall z(Rxz \to \exists v(Rzv \wedge Ryv))$。

(6) $(MLp \wedge p) \to Lp$(**S4.3**)

ST：$(\exists y(Rxy \wedge \forall z(Ryz \to Pz)) \wedge Px) \to \forall v(Rxv \to Pv)$

$CV(p, MLp \wedge p)$：$Ryu \vee x = u$

s：$\forall y((Rxy \wedge \forall z(Ryz \to (Ryz \vee x = z)) \wedge (Ryx \vee x = x) \to \forall v(Rxv \to (Ryv \vee x$

$=v)))$，或者简化成$\forall y(Rxy \to \forall v(Rxv \to (Ryv \vee x=v)))$。

(7) $L(Lp \to q) \vee L(Lq \to p)$ (**S4.3**)

这公式必须先改写成$M(Lp \wedge \neg q) \to L(M \neg q \vee p)$，然后利用推论12.2改写成$M(Lp \wedge q) \to L(Mq \vee p)$。

ST: $\exists y(Rxy \wedge \forall z(Ryz \to Pz) \wedge Qy) \to \forall s(Rxs \to (\exists t(Rst \wedge Qt) \vee Ps))$

$CV(p, M(Lp \wedge q)): Ryu$

$CV(q, M(Lp \wedge q)): y = u$

s: $\forall y((Rxy \wedge \forall z(Ryz \to Ryz) \wedge y=y) \to \forall s(Rxs \to \exists t(Rst \wedge y=t) \vee Rys)))$，或者简化成$\forall y(Rxy \to \forall s(Rxs \to (Rsy \vee Rys)))$。

对于$L((Lp \wedge p) \to q) \vee L(Lq \to p)$，类似的过程可以得到

$$\forall y(Rxy \to \forall s(Rxs \to (Rsy \vee Rys \vee s=y)))。$$

对于下一个定理，我们的还需要一个定义。

定义9.9 一命题字母p在一个模态公式中的正出现和负出现由下述条款归纳定义：

(i) p在p中正出现；

(ii) p不在$\top$或$\bot$中出现；

(iii) p在φ中的正（负）出现是p在$\neg\varphi$中的负（正）出现；

(iv) p在φ中的正（负）出现是p在$\varphi \to \psi$中的负（正）出现，但是也是p在$\psi \to \varphi$中的正（负）出现；

(v) p在φ中的正（负）出现是p在$L\varphi$中的正（负）出现。

由此定义可得出下述导出规则：

(vi) p在φ中的正（负）出现是p在$\varphi \wedge \psi$、$\psi \wedge \varphi$、$\varphi \vee \psi$和$\psi \vee \varphi$中的正（负）出现。

下面的定理比定理9.8更为一般。它以一种不同的表述出现于Sahlqvist [66] 中。

定理9.10 如果模态公式φ是利用命题字母及其否定，$\top$，$\bot$，$\wedge$，$\vee$，L和M构造起来的，并且φ满足以下条件：对φ中出现的所有命题字母p，①p的任何正出现都不在φ的在某个M辖域中形如$\psi \wedge \chi$或$L\psi$的子公式中；或者②p的任何负出现都不在φ的在某个M辖域中形如$\psi \wedge \chi$或$L\psi$的子公式中，那么$\varphi \in M1$。

证明：如果某个命题字母p在φ中只有正出现，那么φ单调于p，根据引理9.6，我们可以考虑改为$[\bot/p]\varphi$。如果一个命题字母p在φ中只有负出现，那么它在$[\neg p/p]\varphi$中只有正出现。根据推论9.2，这是可以考虑的公式而不考虑φ。然后我们用$\bot$代入p，再一次利用推论9.2，消去双重否定，我们就能使余下的每一个命题字母都满足定理中要求的第二个条件。

利用交换律$\neg M\chi \leftrightarrow L\neg\chi$、$\neg L\chi \leftrightarrow M\neg\chi$、德摩根律和双重否定律，可把刚才得到的公式的否定改写成一个仅用命题字母（及其否定），$\top$，$\bot$，$\wedge$，$\vee$，L 和 M 构造起来的公式 ψ。于是一个命题字母在 ψ 中的正出现都不会在 ψ 的某个 L 辖域中任何形如 $\chi_1 \vee \chi_2$ 或 $M\chi$ 的子公式之中。

ψ 的任何子公式 $L\chi$ 都等值于由形如 $L^i p$ 的公式和 n-公式（即没有命题字母正出现的公式）组成一个合取。这个结论的证明是施归纳于 χ 进行的。$\chi = p$，$\neg p$，$\top$，$\bot$ 和 $\chi = \chi_1 \wedge \chi_2$ 的情形都是不足道的。如果 $\chi = \chi_1 \vee \chi_2$ 或者 $\chi = M\chi_1$，则没有命题字母在 χ 中会有正出现。因为，$L\chi$ 与 ψ 满足同样的条件。最后，如果 $\chi = L\chi_1$，则使用归纳假设和定律 $L(\chi_1 \wedge \chi_2) \leftrightarrow L\chi_1 \wedge L\chi_2$。使用这里描述的等价公式代替不处于另一个 L 范围中的 $L\chi$ 的出现，就把 ψ 转化成 ψ'。

另一个归纳证明将确立这样的结论：ψ' 的各个子公式 χ 等值于利用形如 $L^i p$、n-公式、$\wedge$ 和 M 构造起来的公式所组成的一个析取。$\chi = p$，$\neg p$，$\top$，$\bot$ 和 $\chi = \chi_1 \vee \chi_2$ 的情形是不足道的。如果 $\chi = M\chi_1$，则利用定律 $M(\chi_1 \vee \chi_2) \leftrightarrow M\chi_1 \vee M\chi_2$；而如果 $\chi = \chi_1 \wedge \chi_2$，则使用命题分配律。最后，如果 $\chi = L\chi_1$，那么根据上述讨论，它或是一个 n-公式或者形如 $L^i p$ 的公式。应用这个结果到 ψ' 自身，就得到一个析取式 $\psi'' = \psi_1 \vee \cdots \vee \psi_n$，其中，$\psi_i$ 是如所表明的那样构造起来的，ψ'' 是由改写 $\neg\varphi$ 而得到的。因此，φ 等值于 $\neg\psi_1 \wedge \cdots \wedge \neg\psi_n$。依据推论 9.2，只需考虑这些公式 $\neg\psi_i$。

$ST(\psi_i)$ 可以改写成形如 $\exists y_1 \cdots \exists y_k \psi_i'$ 的公式，如同定理 9.9 的证明那样，不过现在仅就 M 的那些有命题字母的正出现在其范围中的出现而言。对于各个命题字母 p，$CV(p, \psi_i)$ 可以像前面那样定义；然后再代入到 $\forall y_1 \cdots \forall y_k \neg\psi_i'$ 中。这样就产生所要求的等价公式 $s(\neg\psi_i)$，这可以通过与前面的证明几乎相同的方式来证明。

$\mathbf{F} \models \neg\psi_i[w]$ 蕴涵 $\mathbf{F} \models s(\neg\psi_i)[w]$ 也是明显的。对于逆命题，假定 $\mathbf{F} \not\models \neg\psi_i[w]$。那么对 $\mathbf{F}$ 上的某个赋值 V 有 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models \psi_i[w]$，因而对某些 w_1，$\cdots$，w_k 有 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models \psi_i'[w, w_1, \cdots, w_k]$。如前利用公式 $CV(p, \psi_i)$ 定义 V' 就产生结论 $\langle \mathbf{F}, V'\rangle \models \psi_i'[w, w_1, \cdots, w_k]$，而且对所有命题字母 p 有 $V'(p) \subseteq V(p)$（在证明 n-公式从 V 过渡到 V' 仍旧为真时需要用到第二个断定）。由此可得，$\mathbf{F} \models \psi_i''[w, w_1, \cdots, w_k]$，这里 ψ_i'' 是 ψ_i' 用 $CV(p, \psi_i)$ 代入 P 后产生的。但是 $(\neg\psi_i) = \forall y_1 \cdots \forall y_k \neg\psi_i''$，因而有 $\mathbf{F} \models s(\neg\psi_i)[w]$。 ■

$M(p \wedge LM\neg p) \to (MLp \vee LL\neg p)$ 是一个可以用定理 9.10 而不可以用定理 9.8 来处理的公式。从前面的论证显然可得，任何模态公式等值于一个用命题字母及其否定，$\top$，$\bot$，$\wedge$，$\vee$，L 和 M 构造起来的公式。在目前情形下应用有关的定律将得到

$$L(\neg p \vee MLp) \vee MLp \vee LL\neg p,$$

它满足定理中的第二个条件。改写它的否定就得到 $M(p \wedge LM\neg p) \wedge LM\neg p \wedge MMp$，这已经是上述证明意义上的一个 ψ_i（其中出现的唯一的 n-公式是 $LM\neg p$）。

$$\begin{aligned} ST(\psi_i) = {} & \exists y(Rxy \wedge Py \wedge \forall z(Ryz \rightarrow \exists v(Rzv \wedge \neg Pv))) \\ & \wedge \forall w(Rxw \rightarrow \exists s(Rws \wedge \neg Ps)) \\ & \wedge \exists t(Rxt \wedge \exists r(Rtr \wedge Pr))。\end{aligned}$$

$$CV(p, \psi_i) = (y = u \vee r = u)。$$

s（$\neg \psi_i$）在简化后成为

$$\begin{aligned} & \forall y(Rxy \rightarrow \forall t(Rxt \rightarrow \forall r(Rtr \rightarrow (\forall z(Ryz \rightarrow \\ & \quad \exists v(Rzv \wedge v \neq y \wedge v \neq r)) \rightarrow \\ & \quad\quad \exists w(Rxw \wedge \forall s(Rws \rightarrow (s = y \vee s = r)))))))。\end{aligned}$$

前述证明中的想法就是考虑一个模态公式 $\varphi = \forall P_1 \cdots \forall P_n \psi(P_1, \cdots, P_n, R)$，改写它，参数 y_1，…，y_k 前移，得到 $\forall P_1 \cdots \forall P_n \forall y_1 \cdots \forall y_k \psi'$，然后找出自由变项都在 x，y_1，…，y_k 之间的 L_0-公式 σ_1，…，σ_n 来代入 P_1，…，P_n。这样就得到一个等价于 φ 的 L_0-公式 $s(\varphi)$。这里从 φ 到 $s(\varphi)$ 的方向显然成立，不必我们操心，因为后者是前者的代入实例（一个全称实例已经产生），但相反的方向还需证明。假定 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models \neg \varphi[w]$，已经表明有 $\langle \mathbf{F}, V'\rangle \models \neg \varphi[w]$。这里，$V'$是由各个 σ_i 定义的一个赋值。把各个 σ_i 从这个赋值“推入”$\neg \varphi$,那么就产生 $s(\varphi)$ 的一个反例。

从这一观点来看，后述的这些模态公式 φ 是有意思的：对于它们来说，$\langle \mathbf{F}, V\rangle \models \varphi[w]$ 蕴涵 $\langle \mathbf{F}, V_1\rangle \models \varphi[w]$ 或…或 $\langle \mathbf{F}, V_m\rangle \models \varphi[w]$，这里 V_1，…，V_m 是指派 W 的 L_0-可定义子集的赋值。$M1$ 中大多数我们熟悉的公式都处于这一范畴，甚至那些不为定理 9.10 所包括的公式，比如定理 10.8 的第三和第四两个条款所提到的那些公式，亦是如此。这个问题的深入研究使得定理 9.10 得到某种轻微的推广（放宽了在命题字母出现上的限制）。例如，可以证明$(L(p \rightarrow q) \wedge Mq) \rightarrow q$ 属于 $M1$。不过，相关的结果不在这里陈述，因为获得的一般性结果足以抵消因技术复杂而付出的巨大代价。

下面给出的两个定义描述的是由所有按照代入方法能够处理的模态公式所组成的类。

定义 9.11 令 α 是形如 $\forall x_1 \cdots \forall x_k \beta$ 的 L_1-公式，这里 $\beta = \beta(P_1, \cdots, P_n, x_1, \cdots, x_k, x)$，并且令 σ_1，…，σ_n 是与 β 无共同约束变项的 L_0-公式，使得对一个固定的不在 α 中出现的变项 s，对于所有的 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$，$\sigma_i = \sigma_i(x_1, \cdots, x_k, x, s)$。则$[\sigma_1/P_1, \cdots, \sigma_n/P_n]\alpha$——即 α 使用 $[u/s]\sigma_i$ 代替形如 $P_i u$ 的子公式——是

α 的一个代入实例，只要没有 x_j 被不同于 α 中第一次 $\forall x_j$ 出现的 $\forall x_j$ 的一次出现约束（像上面那样的技术在对公式进行代入时是不可避免的。不过，它的想法却是相当简单的）。

定义 9.12　M_1^{sub} 是这样的模态公式 $\varphi(=\forall P_1 \cdots \forall P_n ST(\varphi))$ 所组成的集合：这些模态公式被逻辑等值于 $ST(\varphi)$ 的 L_1-公式的代入实例所组成的集合所逻辑蕴涵。

定理 9.13

$M_1^{sub} \subsetneq M1$，

M_1^{sub} 是递归可枚举的。

这个定理是最初的学位论文［5］中证明的。这里，通过引进下述的模型论概念，我们获得对于这个问题更精致的见解。

定义 9.14　M_1^{def} 是由所有对于从一般框架 $\langle \mathbf{F},\ \mathbf{W} \rangle$ 到基础框架 $\mathbf{F}$ 过渡保持真值不变的模态公式 φ 所组成的集合，这里 $\mathbf{W}$ 含有 W 所有通过一个 L_0-公式和 W 中有穷多个参数可定义的子集。形式地讲，如果 $\langle \mathbf{F},\ \mathbf{W} \rangle$ 是一个一般框架，使得对于任意 L_0-公式 $\alpha=\alpha(x,\ x_1,\ \cdots,\ x_k)$ 和所有的 $w_1,\ \cdots,\ w_k \in W$，$\{w \in W \mid \mathbf{F} \models \alpha[w,\ w_1,\ \cdots,\ w_k]\} \in \mathbf{W}$，那么，若 $w \in W$ 使得 $\langle \mathbf{F},\ \mathbf{W} \rangle \models \varphi[w]$，则 $\mathbf{F} \models \varphi[w]$。

定理 9.15

$M_1^{sub} \subseteq M_1^{def}$，

M_1^{def} 是递归可枚举的（并且这事实在 ZF 中可证），

$M_1^{def} \subsetneq M1$。

证明：要证明第一个断言，令模态公式 $\varphi(=\forall P_1 \cdots \forall P_n ST(\varphi))$ 在 M_1^{sub} 中。假定 $\langle \mathbf{F},\mathbf{W} \rangle \models \forall P_1 \cdots \forall P_n ST(\varphi)[w]$，这里，$\langle \mathbf{F},\ \mathbf{W} \rangle$ 是满足定义 9.14 中条件的一般框架。要证明的是 $\mathbf{F} \models \forall P_1 \cdots \forall P_n ST(\varphi)[w]$。为此，我们将证明，对任何逻辑等值于 $ST(\varphi)$ 的 α 的任何代入实例 β，$\mathbf{F} \models \beta[w]$，因而有 $\mathbf{F} \models \varphi[w]$，因为 $\varphi \in M_1^{sub}$。令 $\alpha=\forall x_1 \cdots \forall x_k \alpha'$，并令 $\sigma_1,\ \cdots,\ \sigma_n$ 如定义 9.11（因此，对所有 $i(1 \leqslant i \leqslant n), \sigma_i=\sigma_i(x_1,\cdots,x_k,x,s)$）。令 $\beta=[\sigma_1/P_1,\cdots,\sigma_n/P_n]\alpha=\forall x_1 \cdots \forall x_k[\sigma_1/P_1,\cdots,\sigma_n/P_n]\alpha'$。考虑任意 $w_1,\ \cdots,\ w_k \in W$：现在将要证明的是 $\mathbf{F} \models [\sigma_1/P_1,\cdots,\sigma_n/P_n]\alpha'[w_1,\cdots,w_k,w]$。对每个 $i(1 \leqslant i \leqslant n), A_i \doteq_{def} \{v \in W \mid \mathbf{F} \models \sigma_i[w_1,\cdots,w_k,w,v]$，其中 v 指派给 $s\} \in \mathbf{W}$，并且还有 $\langle \mathbf{F},\mathbf{W} \rangle \models \forall P_1 \cdots \forall P_n \forall x_1 \cdots \forall x_k \alpha'[w]$，因而有 $\langle \mathbf{F},\mathbf{W} \rangle \models \forall x_1 \cdots \forall x_k \forall P_1 \cdots \forall P_n \alpha'[w]$，$\langle \mathbf{F},\mathbf{W} \rangle \models \forall P_1 \cdots \forall P_n \alpha'[w_1,\cdots,w_k,w]$，以及最终有 $\langle \mathbf{F},A_1,\cdots,A_n \rangle \models \alpha'[w_1,\cdots,w_k,w]$。但是最后这个断言蕴涵 $\mathbf{F} \models [\sigma_1/P_1,\cdots,\sigma_n/P_n]\alpha'[w_1,\cdots,w_k,w]$：这正是所要证明的

(同时，罗登伯格已指出，还可由一个简单的论证得到 $M_1^{def} \subseteq M_1^{sub}$。因此，我们对代入方法所作的两个分析恰好重合)。

要了解 M_1^{def} 是递归可枚举的，注意 $\varphi \in M_1^{def}$，当且仅当，对于所有的一般框架〈**F**，**W**〉使得 **W** 恰好由 W 所有通过 L_0-公式和 W 中有穷多个参数可定义的子集组成，对于所有的 $w \in W$，〈**F**，**W**〉$\models \varphi[w]$ 蕴涵 **F** $\models \varphi[w]$。那么这又等值于

$$DS(\varphi) \models \forall P_1 \cdots \forall P_n ST(\varphi);$$

这里 $DS(\varphi) =_{def} \{\alpha \mid \alpha$ 是形如 $\forall x_1 \cdots \forall x_k [\sigma_1/P_1, \cdots, \sigma_n/P_n] ST(\varphi)$ 的 L_0-公式，σ_i 是可以用来代入 $ST(\varphi)$ 中 P_i 的 L_0-公式$\}$。因为 $DS(\varphi)$ 完全由 L_0-公式组成，上述蕴涵命题等价于 $DS(\varphi) \models ST(\varphi)$，因而（据 L_1 的紧致性）它等价于 $\alpha' \models ST(\varphi)$，这里 α' 是 $DS(\varphi)$ 中元素的某个有穷合取。显然，最后这个等价公式是递归可枚举的，因为就 L_1 而言，$\models$ 是一个递归可公理化的概念。

前述证明可以在 ZF 中形式化，无论用到紧致性定理与否都是如此。因为，后一个结果仅为可数语言 L_1 所需要，而且这样一种语言的紧致性也可在 ZF 中建立［要点就在于，证明林登鲍姆扩张引理无需求助于诸如素理想定理一类的非构造性原则，只要事先给定该语言（的公式）的一个良序］。

第三个断言的一部分，也就是 $M_1^{def} \subseteq M1$，是容易证明的。因为，显然，$\forall P_1 \cdots \forall P_n ST(\varphi)$ 蕴涵了每个 $\alpha \in DS(\varphi)$。所以，如果 $\varphi \in M_1^{def}$，那么对于上面提到的公式 α'，$\models \forall P_1 \cdots \forall P_n ST(\varphi) \leftrightarrow \alpha'$，从而 $\varphi \in M1$。

$M_1^{def} \neq M1$ 的证明牵涉 ZF 中特定公式的可证性论证，由于这个证明确实有意思，这里给出了证明。然而，还有一种更简单的模型论证明，参见下面确立定理 9.16 的论证。

可以尝试用第 7 章说明 $M1$ 在 ZF 中不是可证算术的这个结果以及上述断言来表明 M_1^{def} 和 $M1$ 不可能相等。但是，这样的论证仅仅表明 M_1^{def} 和 $M1$ 在 ZF 中不是可证地相等的。为了建立更强的断言以断定这些类确实互不相同，考虑第 7 章中的模态公式 $\varphi = (Lp \rightarrow LLp) \wedge L(Lp \rightarrow LLp) \wedge (LMp \rightarrow MLp)$。我们有：

(1) $ZF + AC \vdash$ "$\varphi \in M1$"，

(2) $ZF \nvdash$ "$\varphi \in M1$"。

现在我们假定这个公式 φ 在 M_1^{def} 中。那么对某个如上所述的 α'，$\varphi \models \alpha'$，并且 $\alpha' \models \varphi$。这两个断言中第一个显然在 ZF 中可证（由于 α' 的形式），而且第二个也是如此，因为 $\alpha' \models \varphi (= \forall P_1 ST(\varphi))$，当且仅当，$\alpha' \models ST(\varphi)$，而且最后这个等价命题在 ZF 中可证（因为它在 L_1 中是逻辑可证的）。这样我们就导出

(3) $ZF \vdash$ "$\varphi \in M_1^{def}$"，

这与（2）矛盾，因为 $M_1^{def} \subseteq M1$ 这一事实的证明显然可以在 ZF 中给出。因此，$\varphi \in M1 - M_1^{def}$。 ■

下面还将再次探讨我们所感兴趣的全局概念。$\overline{M}_1^{def}$ 按明显的方式定义出来：除了省略参数 w 外，正好就像定义 9.14。不过，在表述相应于定理 9.15 的结果以前，还需要一条模型论引理。

引理 9.16 框架〈IN，$<$〉中由 IN 中参数 L_0-可定义的自然数的集合只是有穷集和余有穷集。

证明： 注意，IN 的所有元素都在〈IN，$<$〉中 L_0-可定义。因此，IN 的所有有穷子集和余有穷子集也都是 L_0-可定义的。于是，假定 IN 的某个无穷子集，其补集也是 IN 的无穷子集，二者都是在〈IN，$<$〉中 L_0-可定义的；不妨设为由 $\alpha = \alpha(x, x_1, \cdots, x_k)$ 和参数 $n_1, \cdots, n_k$ 来定义的。由于后面这些数都可以在 L_0 中定义，因此，我们也可以考虑一个无参数公式 α。那么，$\forall x \exists y(Rxy \wedge \alpha(y))$ 和 $\forall x \exists y(Rxy \wedge \neg \alpha(y))$ 二者都会在这个结构中为真。但是，可以用〈IN，$<$〉是 L_0-初等等价于框架〈IN，$<$〉$\oplus$〈ZZ，$<$〉（即紧随于自然数之后，依次抄写下全部整数）这一事实，来反驳这一点。因为，在后一个结构 $\mathbf{F}$ 中，下面这样的等价命题成立：对所有公式 $\beta = \beta(x)$ 和整数"尾巴"中的任意两个元素 r、s，$\mathbf{F} \models \beta(x)\ [r]$，当且仅当，$\mathbf{F} \models \beta(x)\ [s]$（要弄清这一点，可以考虑 $\mathbf{F}$ 上使自然数不变而把所有整数 t 映射到 $t + (s - r)$ 之上的 L_0-自同构 g）。但是，由于有这个等价命题，$\forall x \exists y(Rxy \wedge \alpha(y))$ 和 $\forall x \exists y(Rxy \wedge \neg \alpha(y))$ 就不能二者都在 $\mathbf{F}$ 中为真：矛盾。 ■

定理 9.17

$M_1^{def} \subseteq \overline{M}_1^{def}$，

$\overline{M}_1^{def}$ 是递归可枚举的（因而在 ZF 中可证），

$\overline{M}_1^{def} \subsetneq \overline{M}1$。

证明： 所有这些断言都是显然的，或者完全可以像定理 9.15 证明中相应断言那样得到证明。不过这里将叙述一个证明 $\overline{M}_1^{def} \neq \overline{M}1$ 的新论证。正如第 7 章所示，公式 $(Lp \to Lpp) \wedge (LMp \to MLp) \in \overline{M}1$。这个公式也在一般框架〈$IN$，$<$，$\mathbf{W}$〉中成立，这里 $\mathbf{W}$ 由所有有穷的自然数集和余有穷的自然数集组成。于是，假定它属于 $\overline{M}_1^{def}$，那么，据引理 9.16（此引理告诉我们，这个一般框架正是定义 9.14 中所描述的那种一般框架），它也会在〈IN，$<$〉中成立。但是，它并不成立：例如，令"$V(p)$ 为由所有奇数组成的集合"就定义了一个使它为假的赋值。 ■

由上可见，定理 9.15 和定理 9.17 干净利落地界定了代入方法的适用范围。

10 否证一阶可定义性

迄今为止，只有少数几个模态公式被证明在 $M1$ 或 $\overline{M}1$ 之外。在第 3 章中，$L(Lp \to p) \to Lp$ 被证明定义了其关系的逆是良基的这样的传递框架。一个涉及紧致性定理的例行论证，将证明这些框架所形成的类不是 L_0-可定义的。在第 7 章中，用骆文汉姆 - 斯科伦定理证明了 $LMLLp \to MMLMp$ 和 $(Lp \to LLp) \wedge (LMp \to MLp)$ 都不属于 $M1$。除了这两个定理外，还有第 8 章的结果可用，即如果一个模态公式不对超幂（参见定理 8.6）或超滤扩充（参见定理 8.9）保持，则它不在 $\overline{M}1$ 中。事实上，取决于具体的情况，有些特别的模型论论证也许是有用的，以下述例子为证［参见引理 9.3（iv）］。

引理 10.1 $L(p \to Lp) \to (Mp \to Lp) \notin \overline{M}1$。

证明： 考虑框架 $\mathbf{F} = \langle W, R \rangle$，这里 $W = IN$，并且

$$R = \{\langle 0,n\rangle, \langle n,0\rangle, \langle n,n+1\rangle, \langle n+1,n\rangle \mid n = 1,2,3,\cdots\}。$$

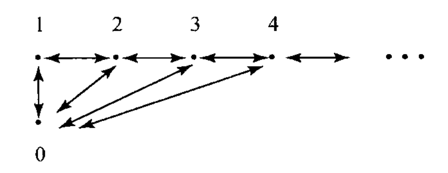


图 10-1

$\mathbf{F} \models L(p \to Lp) \to (Mp \to Lp)$。为了明白这一点，考虑 $\mathbf{F}$ 上的任何赋值 V 和任何 $n \in IN$ 使得 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models L(p \to Lp) \wedge Mp[n]$。要证明的是 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models Lp[n]$，即对所有 m 使得 Rnm，$\langle \mathbf{F}, V\rangle \models p[m]$。在 n 为 0 时，$\langle \mathbf{F}, V\rangle \models Mp[n]$ 蕴涵对某个 $k \geq 1$，有 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models p[k]$。此外，$\langle \mathbf{F}, V\rangle \models L(p \to Lp)[0]$ 蕴涵 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models Lp[k]$。因而，$\langle \mathbf{F}, V\rangle \models p[k+1]$，并且（当 $k \geq 2$ 时）有 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models p[k-1]$。重复这一论证将表

明，对所有 $m \geqslant 1$，$\langle \mathbf{F}, V \rangle \models p[m]$，即$\langle \mathbf{F}, V \rangle \models Lp[0]$。

n 大于 0 时，$\langle \mathbf{F}, V \rangle \models Mp[n]$蕴涵（i）$\langle \mathbf{F}, V \rangle \models p[0]$，或者（ii）$\langle \mathbf{F}, V \rangle \models p[n-1]$，或者（iii）$\langle \mathbf{F}, V \rangle \models p[n+1]$。因为 $\langle \mathbf{F}, V \rangle \models L(p \to Lp)[n]$，所以，（i）$\langle \mathbf{F}, V \rangle \models Lp[0]$，或者（ii）$\langle \mathbf{F}, V \rangle \models Lp[n-1]$（因此，如果$n-1 \geqslant 0$，$\langle \mathbf{F}, V \rangle \models p[0]$；否则，这已经在第一个位置为真，从而 $\langle \mathbf{F}, V \rangle \models Lp[0]$），或者（iii）$\langle \mathbf{F}, V \rangle \models Lp[n+1]$（因此 $\langle \mathbf{F}, V \rangle \models p[0]$，并且 $\langle \mathbf{F}, V \rangle \models Lp[0]$）。因此，在所有三种情形下，$\langle \mathbf{F}, V \rangle \models Lp[0]$和$\langle \mathbf{F}, V \rangle \models p[0]$都成立。由此易得 $\langle \mathbf{F}, V \rangle \models Lp[n]$。

接下来，任取 $\mathbf{F}$ 的一个真 L_0-初等扩张 $\mathbf{F}'$。对 $\mathbf{F}$ 的 L_0-理论的反思（从 $\mathbf{F}$ 到 $\mathbf{F}'$是保持的）表明，$\mathbf{F}'$是由 $\mathbf{F}$ 的一个同构复本加上其元素与 0 双向相连的若干整数复本（以$\{\langle n, n+1 \rangle, \langle n+1, n \rangle \mid n \in ZZ\}$为序）组成的。

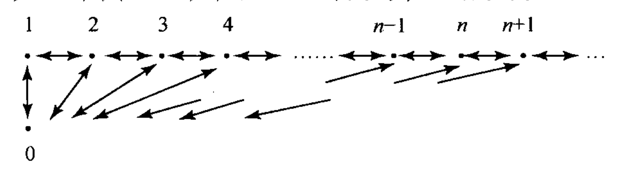


图 10-2

现在令 $V(p) =_{def}$属于 $\mathbf{F}'$中 $\mathbf{F}$ 复本的世界，$L(p \to Lp) \to (Mp \to Lp)$在 $\mathbf{F}'$中的 0 处为假。Lp 在 0 处变为假，因为现在有更多的世界，但是 Mp 和 $L(p \to Lp)$ 都为真。

由此可知，我们的模态公式不对 L_0-初等扩充保持；所以它不能在$\overline{M1}$ 中。 ■

为了使读者对如何丧失一阶可定义性有些印象，考虑引理 9.3（ii）。添加前缀 M 常常导致新公式不在属于 $M1$。这里有几个例子［注意，如下等值式是普遍有效的：$M(\varphi - \psi) \leftrightarrow (L\varphi \to M\psi)$］。

（i）$Mp \to Lp \in M1$，因为$E(Mp \to Lp, \forall y(Rxy \to \forall z(Rxz \to z = y)))$。

$M(Mp \to Lp) \notin M1$，因为 $LMp \to MLp \notin M1$（参见定理 10.2）。另一方面，

（ii）$Lp \to Mp \in M1$，因为 $E(Lp \to Mp, \exists y\, Rxy)$。但是也有

$M(Lp \to Mp) \in M1$，因为 $LLp \to MMp$ 是定理 9.8 所描述的那种公式：

$E(LLp \to MMp, \exists y(Rxy \wedge \exists z\, Ryz))$。

另有两个毫无问题的情形是

（iii）$p \to Lp \in M1$，因为 $E(p \to Lp, \forall y(Rxy \to x = y)$，而且还有 $M(p \to Lp) \in M1$；因为 $E(Lp \to MLp, \exists y(Rxy \wedge \forall z(Ryz \to Rxz)))$。

（iv）$Lp \to p \in M1$：（$E(Lp \to p, Rxx)$），而且还有 $M(Lp \to p) \in M1$，因为 $E(LLp \to Mp, \exists y(Rxy \wedge \exists z(Rxz \wedge Rzy))))$。

但是合取引起麻烦：

(v) $(p\to Lp)\wedge(Lp\to p)$，即 $p\leftrightarrow Lp\in M1$，因为 $E(p\leftrightarrow Lp,\forall y(Rxy\to x=y)$，但是 $M((p\to Lp)\wedge(Lp\to p))\notin M1$。因为，它等值于 $M((p\to(Lp\wedge p))\wedge(Lp\to(Lp\wedge p)))$，并且等值于 $M((Lp\vee p)\to(Lp\wedge p))$，因而等值于 $L(Lp\vee p)\to M(Lp\wedge p)$，这是不在 $M1$ 中的，由下面的定理 10.3 而得。

较系统地说，也许可以在下面的意义上考虑定理 9.8 是否为最佳可能的结果，一旦违背它的句法条件立即丧失一阶可定义性。该定理描述 $\varphi\to\psi$ 这样的公式，后件 ψ 为正公式，而前件 φ 中则不允许有形如

$$L(\cdots M\cdots)\ \text{或}\ L(\cdots\vee\cdots)$$

这样的组合。ψ 必须是正公式，这个条件由例子 $L(Lp\to p)\to Lp$ 来说明的，这个公式也可改写成 $M\neg p\to M(Lp\wedge\neg p)$，或者据推论 9.2，改写成 $Mp\to M(p\wedge L\neg p)$。另外两个要求由下述否定性结果表明。

定理 10.2 $LMp\to MLp\notin \overline{M1}$。

证明： 考虑框架 $\mathbf{F}=\langle W,R\rangle$，其中，$W=\{x\}\cup\{y_n,y_{ni}\mid n\in IN,i\in\{0,1\}\}\cup\{z_f\mid f:IN\to\{0,1\}\}$，并且 $R=\{\langle x,y_n\rangle,\langle y_n,y_{ni}\rangle,\langle y_{ni},y_{ni}\rangle\mid n\in IN,i\in\{0,1\}\}\cup\{\langle x,z_f\rangle,\langle z_f,y_{nf(n)}\rangle\mid n\in IN,f:IN\to\{0,1\}\}$。

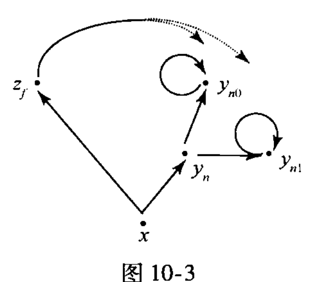


图 10-3

$\mathbf{F}\models LMp\to MLp$。对所有不同于 x 的 w，容易看出 $\mathbf{F}\models LMp\to MLp[w]$。$\mathbf{F}\models LMp\to MLp[x]$ 成立的证明如下。设 $\langle\mathbf{F},V\rangle\models LMp[x]$，那么对每个 $n\in IN$，$\langle\mathbf{F},V\rangle\models Mp[y_n]$。因而 $\langle\mathbf{F},V\rangle\models p[y_{n0}]$ 或 $\langle\mathbf{F},V\rangle\models p[y_{n1}]$。选取 $f:IN\to\{0,1\}$ 使得对各个 $n\in IN$，$\langle\mathbf{F},V\rangle\models p[y_{nf(n)}]$。那么，显然，$\langle\mathbf{F},V\rangle\models Lp[z_f]$，因此，$\mathbf{F}\models MLp[x]$。

现在，令 $\mathbf{F}'$ 是 $\mathbf{F}$ 的任意可数的 L_0-初等子框架，（对于所有的 $n\in IN$）它的论域包含了 x，以及 y_n，y_{n0}，y_{n1}。一定有某个 f：$IN\to\{0,1\}$ 使得 $z_f\in W-W'$，因为 W 不可数。令 $V(p)=\{y_{nf(n)}\mid n\in IN\}$，就产生一个赋值 V 使得 (i) $\langle\mathbf{F}',V\rangle\models LMp[x]$，但是 (ii) $\langle\mathbf{F}',V\rangle\not\models MLp[x]$。这里，(ii) 由 Lp 在任何 y_n 和 $z_g\in W'$（因为 $g\neq f$）中都不成立这一事实得出。要看出 (i) 成立，首先注意 Mp 在每个 y_n 上成立。此外，对于每个 $z_g\in W'$，存在某个 $n\in IN$ 使得 $g(n)=f(n)$ [假设如对每个 $n\in IN$，$g(n)=1-f(n)$，那么 z_f 就会在 W' 中，因为“互补”世界 z_f 的存在

是 L_0-可表达的]。由于这个事实，因此〈$\mathbf{F}'$，V〉$\models Mp[z_g]$。换句话说，$LMp \to MLp$ 被证明在 $\mathbf{F}'$中（的 x 上）不成立。因而，据 L_0-句子的骆文汉姆－斯科伦定理，$LMp \to MLp$ 不能属于$\overline{M1}$。 ■

定理 10.3　$L(Lp \vee p) \to M(Lp \wedge p) \notin M1$。

证明：考虑框架 $\mathbf{F} = \langle W, R\rangle$，其中，$W = \{x\} \cup \{y_{ni} \mid n \in IN, i \in \{0, 1\}\} \cup \{z_f \mid f: IN \to \{0, 1\}\}$，并且 $R = \{\langle x, y_{n0}\rangle, \langle y_{n0}, y_{n1}\rangle \mid n \in IN\} \cup \{\langle x, z_f\rangle, \langle z_f, z_f\rangle, \langle z_f, y_{nf(n)}\rangle \mid n \in IN, f: IN \to \{0, 1\}\}$。

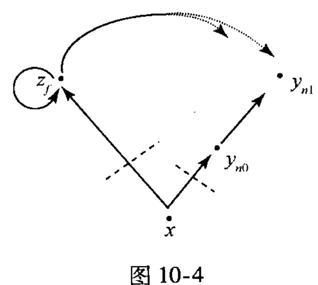


图 10-4

$\mathbf{F} \models L(Lp \vee p) \to M(Lp \wedge p)[x]$。因为，如果〈$\mathbf{F}$,$V$〉$\models L(Lp \vee p)[x]$，那么〈$\mathbf{F}$,$V$〉$\models p[y_{n0}]$，或者〈$\mathbf{F}$,$V$〉$\models p[y_{n1}]$（对每个 $n \in IN$），并且对每个世界 z_f,〈$\mathbf{F}$,V〉$\models p[z_f]$。那么选择函数f：$IN \to \{0, 1\}$ 使得对每个 $n \in IN$,〈$\mathbf{F}$,V〉$\models p[y_{nf(n)}]$。显然，〈$\mathbf{F}$,V〉$\models Lp \wedge p[z_f]$，因此〈$\mathbf{F}$,V〉$\models M(Lp \wedge p)[x]$。

再次令 $\mathbf{F}'$为 $\mathbf{F}$ 的任何含有 x 和所有世界 y_n 的可数 L_0-初等子框架。令 $z_f \in W - W'$，$V(p) = \{z_g \mid z_g \in W'\}$，从而定义赋值 V。一个容易的演算就表明〈$\mathbf{F}'$,V〉$\models L(Lp \vee p)[x]$，但〈$\mathbf{F}'$,V〉$\not\models M(Lp \wedge p)[x]$。所以，$L(Lp \vee p) \to M(Lp \wedge p)$ 在 $\mathbf{F}'$中 x 上不成立。 ■

注记：定理 10.3 中的公式表明眼前的主题是多么的棘手。因为，公式 $L(Lp \vee p) \to MLp$ 似乎恰恰与 $L(Lp \vee p) \to M(Lp \wedge p)$ 以相同的方式违反定理 9.8 的条件，但是它却在 $M1$ 中！对于所有的框架 $\mathbf{F}$ 和 $w \in W$，$\mathbf{F} \models L(Lp \vee p) \to MLp[w]$，当且仅当，$\mathbf{F} \models Lp \to MLp[w]$［注意，$L(Lp \vee p)$ 蕴涵 $MLp \vee Lp$］，并且 $Lp \to MLp \in M1$，它是上述例子之一。

还要看到，定理 10.3 的陈述弱于定理 10.2 中所作的陈述。在定理 10.2 的证明中，相关的公式在 $\mathbf{F}$ 中成立（即处处为真），但在 $\mathbf{F}'$中不成立。不过，在定理 10.3 的证明中，它在 $\mathbf{F}$ 中的某个 w 处成立，而在 $\mathbf{F}'$中同一个 w 上不成立，因而它没有*局部* L_0-等价物。常常很难把后一种证明转换成前一种证明。

关于下一个结果，参见引理 8.10。

定理 10.4　$L(p \vee q) \to M(Lp \vee Lq) \notin M1$。

证明： 考虑框架 $\mathbf{F}=\langle W,R\rangle$，其中，$W=\{x\}\cup\{y_{ni}\mid n\in IN, i\in\{0,1\}\}\cup\{z_f\mid f: IN\to\{0,1\}\}$，并且 $R=\{\langle x,y_{ni}\rangle,\langle y_{ni},y_{nj}\rangle\mid n\in IN, i,j\in\{0,1\}\}\cup\{\langle x,z_f\rangle,\langle z_f, y_{nf(n)}\rangle\mid n\in IN, f: IN\to\{0,1\}\}$。

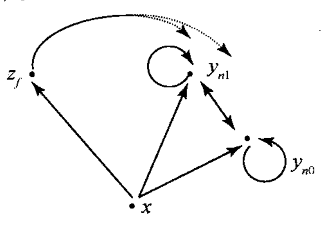


图 10-5

$\mathbf{F}\models L(p\vee q)\to M(Lp\vee Lq)[x]$。因为，如果$\langle\mathbf{F},V\rangle\models L(p\vee q)[x]$，那么要么对某个 $n\in IN$，$\langle\mathbf{F},V\rangle\models Lp[y_{n0}]$——因而$\langle\mathbf{F},V\rangle\models M(Lp\vee Lq)[x]$——要么对每个$n\in IN$，$\langle\mathbf{F},V\rangle\models q[y_{n0}]$，或$\langle\mathbf{F},V\rangle\models q[y_{n1}]$——因此对任何使得对于每个 n 有$\langle F,V\rangle\models q[y_{nf(n)}]$的$f$都有$\langle\mathbf{F},V\rangle\models Lq[z_f]$，而且再次有$\langle\mathbf{F},V\rangle\models M(Lp\vee Lq)[x]$。

接着进入 **F** 那个熟悉的可数 L_0-初等子框架 $\mathbf{F}'$，它的域含有 x 和所有 y_{ni}。对于任何 $z_f\in W-W'$，令 $V(p)=\{y_{nf(n)}\mid n\in IN\}$ 和 $V(q)=W-V(p)$。显然，$\langle\mathbf{F}', V\rangle\models L(p\vee q)[x]$。此外，$Lp$ 和 Lq 都不在任何 y_{ni}上成立，并且对任何 $z_g\in W$ 也是如此（这样一个世界 z_g 至少在一个“自变量” n 处不同于 z_f。因此，Lp 在 z_g 上假。但是它也至少在一个自变量 n 上与 z_f 产生相同的值，因而 Lq 也在 z_g 上不成立）。换句话说，$L(p\vee q)\to M(Lp\vee Lq)$在 $\mathbf{F}'$中的 x 上不成立。■

以上我们看到一系列涉及骆文汉姆－斯科伦定理应用的例子，接下来，我们使用同样的方法处理一个在［27］第 19 章找到的公式来结束这里的讨论。这个公式是$\neg LM(\neg p\wedge Lp)$，或者等价地说，$ML(Lp\to p)$。

定理 10.5　$ML(Lp\to p)\notin M1$。

证明： 考虑框架 $\mathbf{F}=\langle W,R\rangle$，其中，$W=\{x\}\cup\{y_n,y_{ni}\mid n\in IN, i\in\{0,1,2\}\}\cup\{z_f,z_{fn}\mid n\in IN, f: IN\to\{0,1\}\}$，并且 $R=\{\langle x,y_n\rangle,\langle y_n,y_{n0}\rangle,\langle y_n,y_{n1}\rangle,\langle y_{n1},y_{n2}\rangle\mid n\in IN\}\cup\{\langle x,z_f\rangle,\langle z_f,z_{fn}\rangle,\langle z_{fn},y_{nf(n)}\rangle\mid n\in IN, f: IN\to\{0,1\}\}$。

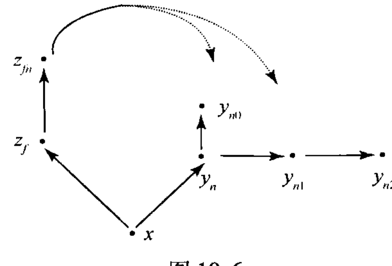


图 10-6

$\mathbf{F} \models ML(Lp \to p)[x]$。若不然，比如对某个赋值 V，$\langle \mathbf{F}, V\rangle \models LM(Lp \wedge \neg p)[x]$：得出矛盾。取 f: $IN \to \{0, 1\}$ 使得对每个 $n \in IN$，$\langle \mathbf{F}, V\rangle \models \neg p[y_{nf(n)}]$，那么 $\langle \mathbf{F}, V\rangle \models LM\neg p[z_f]$。这与下述事实矛盾，即根据关于 x 的假定，$\langle \mathbf{F}, V\rangle \models M(Lp \wedge \neg p)[z_f]$。

如果 $\mathbf{F}'$ 是 $\mathbf{F}$ 的可数 L_0-初等子框架，它的域含有 x 和所有世界 y_n 和 y_{ni}，那么 ML（$Lp \to p$）在 $\mathbf{F}'$ 中 x 上不成立。要看到这一点，令 $z_f \in W - W'$（注意，没有世界 z_{fn} 会在 W' 中！）。令 $V(p) = \{y_{n2} \mid n \in IN\} \cup \{y_{n(1-f(n))} \mid n \in IN\}$。一个容易的演算表明 $\langle \mathbf{F}', V\rangle \models LM(Lp \wedge \neg p)[x]$。 ■

本章的方法与前一章的那些方法一起，似乎都是在为 $M1$ 的刻画提供工具。但是，另一方面，推论 7.9 使人很怀疑：$M1$ 根本不能从句法上刻画。于是，最谨慎的方法就是考虑一些特殊情形。

首先，注意任何模态公式都等值于一个利用命题字母、命题字母的否定、$\wedge$、$\vee$、L 和 M 构造起来的公式。这个观点和定理 9.10 已经被证明是有利的。现在，让我们把注意力限制到下述的子情形。

（1）命题字母（的否定）、$\wedge$、$\vee$ 和 L。根据定理 9.10，所有这种公式都属于 $M1$（组合 $M(\cdots L \cdots)$ 或 $M(\cdots \wedge \cdots)$ 都不会出现）。

（2）命题字母（的否定）、$\wedge$、$\vee$ 和 M。在这种情形下，$M1$ 之外的公式被生成，比如 $M(M\neg p \wedge \neg p) \vee M(Mp \wedge p)$，它等值于 $L(Lp \vee p) \to M(Mp \wedge p)$（参见定理 10.3）。

定理 10.6　$L(Lp \vee p) \to M(Mp \wedge p) \notin M1$。

证明： 考虑框架序列 $\mathbf{F}_2$，$\mathbf{F}_3$，$\mathbf{F}_4$，…，这里 $\mathbf{F}_n = \langle W_n, R_n\rangle$，$W_n = \{0, 1, \cdots, n\}$，并且 $R = \{\langle 0, i\rangle \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{\langle 1,2\rangle, \cdots, \langle n-1, n\rangle, \langle n, 1\rangle\}\langle n \geqslant 2\rangle$。

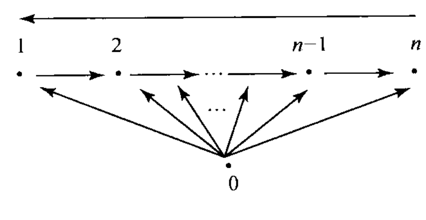


图 10-7

注意，对所有奇数 n，$\mathbf{F}_n \models L(Lp \vee p) \to M(Mp \wedge p)[0]$。现在假定这个公式等值于某个 L_0-公式 $\alpha(x)$。一个例行的论证，把紧致性定理应用于某个恰当选择的 L_0-句子集与 α 的结合，就产生一个无穷框架 $\mathbf{F}$，它有一个无 R-前驱的世界 w，它有无穷多个 R-后继，每一个这样的 R-后继各自有恰好一个 R-前驱（除 w 外）和恰好一个 R-后继。而且，R 是禁自返的，并且没有任何有穷长的环出现。但

是，另一方面，定义这样一个“候补”赋值 V 就很容易使 $\alpha(x)$ 在 $\mathbf{F}$ 中 w 上假，即一个（不同于 w 的）世界属于 $V(p)$ 仅当它的 R-后继和（不同于 w 的）R-前驱都不属于 $V(p)$。 ■

继续上面的子情形列举：

(3) 命题字母（的否定）、$\vee$、L 和 M。这个过程仍生成 $M1$ 之外的公式，比如 $ML\neg p \vee MLp$，即 $LMp \to MLp$。

(4) 命题字母（的否定）、$\wedge$、L 和 M。

关于这一情形的答案迄今还未找到。以此方式生成的所有公式，似乎很有可能都属于 $M1$，但还不清楚要用什么方法来处理它们。为了多一点了解，考虑模态公式 $M(MLp \wedge MML\neg p)$。明显的着手方法是利用它的闭代入实例 $M(ML\top \wedge MML\bot)$［即 $M(M\top \wedge MML\bot)$］，或者 $MMML\bot$ 和 $M(ML\bot \wedge MML\top)$［即 $M(ML\bot \wedge MM\top)$］。不过，它并不为这些闭代入实例所蕴涵，以下述框架 $\mathbf{F} = \langle W, R\rangle$ 为证。

$W = \{0, \cdots, 7\}$

$R = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 0,5\rangle, \langle 5,6\rangle, \langle 6,7\rangle\}$

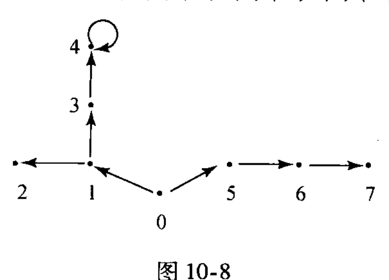


图 10-8

$MMML\bot$ 和 $M(ML\bot \wedge MM\top)$ 都在 0 处成立，但 $M(MLp \wedge MML\neg p)$ 不成立：令 $V(p) = \{4\}$。另一方面，后面这个公式在 $\langle W, R'\rangle$ 中的 0 处成立，这里 $R' = R \cup \{\langle 5,4\rangle\}$。$M(MLp \wedge MML\neg p)$ 在 $M1$ 中吗？对类似例子的分析尝试导致这样的猜测，至少，所有的这种公式都全局等值于闭模态公式。

一种完全不同的限制类型如下。

定义 10.7　一条*模态归约原理*就是一个形如 $\vec{M}p \to \vec{N}p$ 的模态公式，这里 $\vec{M}$ 和 $\vec{N}$ 都是由模态算子 L、M 形成的（可能空的）序列。

在模态逻辑中使用的许多模态公理都是这种类型的模态公式：它们表达重叠模态算子的相互依赖性（参见第 5 章）。本章的“否定性”方法和第 9 章的“肯定性”代入方法，能满足在这种特殊情形下刻画 $M1$ 的需要。因此，至少就局部一阶可定义性而言，下一条在［8］中得到证明的定理解决了菲奇的一个

问题[26]。

定理 10.8　一条模态归纳原理$\overrightarrow{M}p\to\overrightarrow{N}p$在$M1$中，当且仅当，它具有下述形式之一：

(i) 对某个i、$j\in IN$和任意的$\overrightarrow{N}$，$M^iL^jp\to\overrightarrow{N}p$；

(ii) 对某个i、$j\in IN$和任意的$\overrightarrow{M}$，$\overrightarrow{M}p\to L^iM^jp$；

(iii) 对某个使得$\overrightarrow{N}_1$长度为i的$i\in IN$和任意的$\overrightarrow{M}_1$，$L^i\overrightarrow{M}_1p\to\overrightarrow{N}_1\overrightarrow{M}_1p$；

(iv) 对某个使得$\overrightarrow{M}_1$长度为i的$i\in IN$和任意的$\overrightarrow{N}_1$，$\overrightarrow{M}_1\overrightarrow{N}_1p\to M^i\overrightarrow{N}_1p$。

容易看出，这四种模态公式都在$M1$中。定理9.8保证（i），并且（在使用$\neg p$代替p并且逆否换位后）与推论9.2一起保证（ii）。根据是引理9.6，形如（iii）和（iv）的公式都等值于闭公式，从而都在$M1$中（例如，$LLMLp\to MLMLp$等值于$LLML\top\to MLML\top$，甚至等值于$LLM\top\to M\top$）。

不过，余下要弄清的是，模态归纳原理——或者实际上就是只带一个命题字母的模态公式——是否在任何意义下就模态公式而言一般都是典型的。至少，后者对于较普遍的情形并不起归约类的作用。因为，存在带两个命题字母的模态公式，就它们而言，不存在带一个命题字母的模态公式定义同一类框架。

引理 10.9　$L((Lp\wedge p)\to q)\vee L(Lq\to p)$不等值于任何只带一个命题字母的模态公式。

证明：考虑两个框架$\mathbf{F}_1$和$\mathbf{F}_2$，其中，$W_1=\{0,1,2\}$，$R_1=\{\langle 0,1\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle\}$，并且$W_2=\{0,1,2,3\}$，$R_2=\{\langle 0,1\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 0,3\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 2,2\rangle\}$。

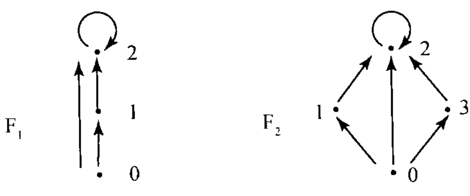


图 10-9

正如第3章所示，$E(L((Lp\wedge p)\to q)\vee L(Lq\to p),\forall y(Rxy\to\forall z(Rxz\to(Ryz\vee Rzy\vee z=y))))$。因此，这个模态公式在$\mathbf{F}_1$中成立，但在$\mathbf{F}_2$中不成立。现在，将要证明，对任何仅带一个命题字母（比如说p）使得$\mathbf{F}_1\models\varphi$成立的模态公式$\varphi$有$\mathbf{F}_2\models\varphi$，由此得出这条引理。

令V是$\mathbf{F}_2$上的赋值，只需考虑$V(p)$。

情形1：1和3二者或者都在$V(p)$内，或者都在$V(p)$外。在定义2.16的意义上，映射$f_1=\{\langle 0,0\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$是从$\langle\mathbf{F}_2,V\rangle$到$\langle\mathbf{F}_1,V'\rangle$上的

p-态射，这里 $V'(p) =_{def} V(p) - \{3\}$。因此，任何在 $\mathbf{F}_2$ 中某个世界 w 上为真的公式也都在 $\mathbf{F}_1$ 中 $f_1(w)$ 上为真，根据是定理2.17。

情形2：$1 \in V(p), 3 \notin V(p)$：

子情形2.1：$2 \in V(p)$。函数 $f_2 = \{\langle 0,0\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle\}$ 是从 $\langle \mathbf{F}_2, V\rangle$ 到 $\langle \mathbf{F}_1, V'\rangle$ 上的 p-态射，这里 $V'(p) =_{def} V(p) - \{1\}$。

子情形2.2：$2 \notin V(p)$ 是对称的：把3映到2，而不是将1映到2。

同样的东西对于情形3也成立：

情形3：$1 \notin V(p), 3 \in V(p)$。

最后，如果 $\mathbf{F}_2 \not\models \varphi$，那么对 $\mathbf{F}_2$ 上某个赋值 V 和某个 $w \in W_2$，$\langle \mathbf{F}_2, V\rangle \models \neg\varphi[w]$。根据前一段落，存在 $\mathbf{F}_1$ 上一个赋值 V' 和世界 $w' \in W_1$，使得 $\langle \mathbf{F}_1, V'\rangle \models \neg\varphi[w']$。■

11 相对的一阶可定义性

在模态逻辑的各种应用中，很自然把注意力限于择代关系满足某种限制条件的框架类。例如，在模态逻辑原来的克里普克语义中，自返性（即$\forall xRxx$）当然是需要的。以这样的限制为准，模态公式关于一阶可定义性的行为可以相当可观地改变。例如，在所有自返框架组成的类上，前一章中的公式$L(Lp\vee p)\rightarrow M(Lp\wedge p)$、$ML(Lp\rightarrow p)$和$L(Lp\vee p)\rightarrow M(Mp\wedge p)$都会成为普遍有效的，因而显然是一阶可定义的［第一个例子也许不那么明显。注意，$L\varphi\rightarrow\varphi$和$\varphi\rightarrow M\varphi$已经成为普遍有效的。那么$L(Lp\vee p)\rightarrow L(p\vee p)\rightarrow Lp\rightarrow Lp\wedge p\rightarrow M(Lp\wedge p)$］。其他已经考虑过的限制条件有延续性（即$\forall x\exists yRxy$）和传递性［即$\forall x\forall y(Rxy\rightarrow\forall z(Ryz\rightarrow Rxz))$］。传递性将在后面得到更细致的讨论。至于延续性，下面取自［8］的例子将要说明，这样简单的限制条件如何可能影响前面定理10.8那样的结果。

定理11.1　在满足$\forall x\exists yRxy$的框架类上，一条模态归约原理在$M1$中，当且仅当，它是下述形式之一：

(i) $M^iL^jp\rightarrow\overrightarrow{N}p$

(ii) $\overrightarrow{M}p\rightarrow L^iM^jp$ 或者

(iii) $\overrightarrow{M}p\rightarrow\overrightarrow{N}p$，这里$\overrightarrow{M}$和$\overrightarrow{N}$是相等长度的模态算子序列，使得对每个$k\in IN$，如果$(\overrightarrow{M})_k=M$，那么$(\overrightarrow{N})_k=M$。

确定使所有模态公式变成一阶可定义而没有太多限制的条件，这是有意思的。为此目的，回顾引理9.7：模态度至多为1的模态公式都属于$M1$。因此，使所有模态公式都是一阶可定义的一个办法就是，引入把每个模态公式归约为模态度至多为1的公式的关系条件。这尤其意味着，模态算子序列都将必须坍塌为单个这样的算子。因此，一条明显的归约原理是$LLp\leftrightarrow Lp$（因此$MMp\leftrightarrow Mp$）。此外，必须要处理其他可选择的东西，比如“ML”。从存在$S5$这样的模态逻辑的观点看（参见第5章），$MLp\leftrightarrow Lp$（因此也有$LMp\leftrightarrow Mp$）似乎是有意思的候选者。另一种类型的模态算子嵌套出现在比如$L(p\vee Lq)$中。这些公式如何缩短呢？幸

好，这种情形并不需要任何特殊的规定，正如在［8］中注意到的那样，从上面两个公式可以导出的公式 $MLp \to LLp$ 蕴涵着这样一条一般的归约原理：

$$L(p \vee Lq \vee Mr) \leftrightarrow (Lp \vee LLq \vee LMr)。$$

［证明的概要如下：$L(p \vee Lq \vee Mr) \to (MLq \vee L(p \vee Mr)) \to (LLq \vee L(p \vee Mr)) \to (LLq \vee (Lp \vee MMr)) \to (LLq \vee Lp \vee LMr)$］

从这些事实得出以下结果。

引理 11.2 对任意模态公式 φ，可以从 φ 能行地构造模态度至多为 1 的模态公式 ψ，使得 $\varphi \to \psi$ 在所有使 $LLp \leftrightarrow Lp$ 和 $MLp \leftrightarrow Lp$ 都成立的框架组成的类上普遍有效。

利用定理 9.8 的证明，很容易发现，

$$E(LLp \to Lp, \forall y(Rxy \to \exists z(Rxz \wedge Rzy)))$$
$$E(Lp \to LLp, \forall y(Rxy \to \forall z(Ryz \to Rxz)))$$
$$E(MLp \to Lp, \forall y(Rxy \to \forall z(Rxz \to Ryz)))$$
$$E(Lp \to MLp, \exists y(Rxy \wedge \forall z(Ryz \to Rxz)))$$

稍微思考就可以看出，上面的第一个条件可以由第三个条件推出，并且给定第二个条件，那么第四个可以换成 $\exists yRxy$。换句话说，下面的定理已得到证明。

定理 11.3 在满足 $\forall x \exists yRxy$、$\forall x \forall y(Rxy \to \forall z(Ryz \to Rxz))$ 和 $\forall x \forall y(Rxy \to \forall z(Rxz \to Ryz))$ 的框架所组成的类上，任何模态公式都属于 $M1$。

这个结果意味着，在 S5（要求 R 是等价关系）基础上，每个模态公式都是一阶可定义的，但是它稍微强一些，因为某些择代关系不是等价关系的框架也满足这里的条件。框架 $\langle \{0,1\}, \{\langle 0,1 \rangle, \langle 1,1 \rangle\} \rangle$ 就是一个例子。

框架上最有意思的条件，大概就是择代关系是传递的。因为满足这个条件的框架所组成的类是由一个模态公式定义的，也就是 $Lp \to LLp$，同时它对生成子框架、不相交并和 p-态射像等基本运算封闭（参见第 2 章中有关的定理）。由于 $Lp \to LLp \in M1$，传递框架所组成的类本身甚至还对超滤扩充封闭，根据是定理 8.9。换句话说，前几章的模型论可以毫无保留地应用。

在传递性的条件下，$M1$ 和 $\overline{M}1$ 之间的区别实质上消失了，正如下面将要在定理 11.8 中看到的那样。首先，需要有几个辅助结果。在第 15 章中将证明，如果 φ 是 $\overline{M}1$ 中任意的模态公式，则存在受限的 L_0-公式 $\alpha = \alpha(x)$［即 α 中所有量词都是只出现在 $\forall y(Rzy \to$ 或 $\exists y(Rzy \wedge$ 的上下文中，这里 z 不同于 y］使得 $\overline{E}(\varphi, \forall x\alpha)$。对于传递框架这种特殊情形，很容易证明这个结果（参见推论 11.7）。受限的 L_0-公式的效用来源于下面的性质（也参见引理 3.11 的证明）。

引理 11.4 如果 $\alpha = \alpha(x_1, \cdots, x_n)$ 是受限的 L_0-公式，并且，如果 $\mathbf{F}_1$ 是 $\mathbf{F}_2$

的生成子框架且 w_1，…，$w_n \in W_1$，那么 $\mathbf{F}_1 \models \alpha[w_1, \cdots, w_n]$，当且仅当，$\mathbf{F}_2 \models \alpha[w_1, \cdots, w_n]$。

受限公式关于生成子框架的这一不变性由例行的公式归纳得到。注意，特别地有，对受限公式 $\alpha = \alpha(x, x_1, \cdots, x_n)$，$\mathbf{F} \models \alpha[w, w_1, \cdots, w_n]$，当且仅当，$TC(\mathbf{F}, w) \models \alpha[w, w_1, \cdots, w_n]$。

定义 11.5　令 x 是某个固定的变项。对任意的 L_0-公式 α，根据下述条款归纳定义 $R_x(\alpha)$：

对于原子公式 $\alpha, R_x(\alpha) = \alpha$，

$R_x(\neg \alpha) = \neg R_x(\alpha)$

$R_x(\alpha \rightarrow \beta) = R_x(\alpha) \rightarrow R_x(\beta)$

$R_x(\forall y\alpha) = R_x([x/y]\alpha) \wedge \forall y(Rxy \rightarrow R_y(\alpha))$，

这里，$[x/y]$ α 是对 α 中用 x 代替 y 所得的结果，必要时可作约束变项字母变换，并且这里的 y 不同于 x（或者如有必要时则使它不同于 x）。

显然，所有形如 $R_x(\alpha)$ 的公式都是受限的。而且 α 和 $R_x(\alpha)$ 之间存在如下联系。

引理 11.6　如果 $\mathbf{F}$ 是传递框架 $\langle W, R\rangle$ 使得 $w, w_1, \cdots, w_n \in TC(\mathbf{F}, w)$，那么对于任意的 L_0-公式 $\alpha = \alpha(x, x_1, \cdots, x_n)$，$\mathbf{F} \models R_x(\alpha)[w, w_1, \cdots, w_n]$，当且仅当，$TC(\mathbf{F}, w) \models \alpha[w, w_1, \cdots, w_n]$。

施归纳于 α 就可以证明，注意，$TC(\mathbf{F}, w)$ 的域是 $\{w\} \cup \{v \in W \mid Rwv\}$。

推论 11.7　如果$\overline{E}(\varphi, \alpha)$，那么$\overline{E}(\varphi, \forall xRx(\alpha))$。

证明：如果 $\mathbf{F} \models \varphi$，那么——根据推论 2.12——对所有的 $w \in W, TC(\mathbf{F}, w) \models \varphi$，因而对所有的 $w \in W, TC(\mathbf{F}, w) \models \alpha$。因此，根据引理 11.6，$\mathbf{F} \models \forall xR_x(\alpha)$。

如果 $\mathbf{F} \models \forall x\, R_x(\alpha)$，那么，对所有的 $w \in W, \mathbf{F} \models R_x(\alpha)[w]$ [因此 $TC(\mathbf{F}, w) \models \alpha[w]$，所以 $TC(\mathbf{F}, w) \models \alpha$；因为 α 是 L_0-句子]。由此可得，对所有的 $w \in W$，$TC(\mathbf{F}, w) \models \varphi$，因此，$\mathbf{F} \models \varphi$；仍然是根据推论 2.12 而来。■

下面是主要结果。

定理 11.8　在传递框架上，对于任意的模态公式 φ，$\varphi \in \overline{M}1$，当且仅当，$L\varphi \in M1$。

证明：首先，设 $\varphi \in \overline{M}1$，比如说$\overline{E}(\varphi, \alpha)$。根据推论 11.7，可以假定 α 形如 $\forall x\beta$，这里，$\beta = \beta(x)$ 是受限的 L_0-公式。令 y 是任何不在 $\forall x\beta$ 中出现的变项。将要证明

$$E(L\varphi, \forall y(Rxy \rightarrow [y/x]\beta)) \qquad (^*)$$

为了弄清这一点，令 $\mathbf{F} \models L\varphi[w]$。由此可得，$TC(\mathbf{F}, w) \models L\varphi[w]$；或者，对于所有的 $v \in W$ 使得 Rwv，$TC(\mathbf{F}, w) \models \varphi[v]$。称把域限制到 $\{v \in W \mid Rwv\}$ 而得

到的 $TC(\mathbf{F}, w)$ 的子框架为 $TC(\mathbf{F}, w)^-$（在此方式下 w 也许被丢掉）。注意，$TC(\mathbf{F}, w)^-$ 是 $TC(\mathbf{F}, w)$ 的生成子框架。因此，对域中每个 v，$TC(\mathbf{F}, w)^- \models \varphi\ [v]$；所以，$TC(\mathbf{F}, w)^- \models \varphi$。但是，$TC(\mathbf{F}, w)^- \models \forall x\beta$，而且对 w 的所有 R-后继 v，$TC(\mathbf{F}, w)^- \models \beta[v]$。现在，$TC(\mathbf{F}, w)^-$ 是 $TC(\mathbf{F}, w)$ 的生成子框架，它也是 $\mathbf{F}$ 的生成子框架。因此——利用引理 11.4——对 w 的所有 R-后继 v，$\mathbf{F} \models \beta[v]$。换句话说，$F \models \forall y(Rxy \rightarrow [y/x]\ \beta)[w]$。这就证明了（*）的一个方向。另一个方向可以通过倒转这个论证而得。因此 $L\varphi \in M1$。

下面设 $L\varphi \in M1$。那么显而易见，$L\varphi \in \overline{M}1$。于是，类似于证明引理 8.8 的论证表明，$\varphi \in \overline{M}1$。实际上，这个蕴涵命题一般地成立。设 $\varphi \notin \overline{M}1$。那么根据定理 8.6，存在框架集 $\{\mathbf{F}_i \mid i \in I\}$ 和 I 上的一个超滤 U 使得对于所有的 $i \in I$，$\mathbf{F}_i \models \varphi$，但是 $\prod_U \mathbf{F}_i \not\models \varphi$。把某个新常项 a 增加到 W_i 并且令 $\overline{R}_i = R_i \cup \{\langle a, w\rangle \mid w \in W_i\}$，以此定义框架 $\mathbf{F}_i'$。显然，如果 $\mathbf{F}_i \models \varphi$，那么 $F_i' \models L\varphi$。而且，$\prod_U \mathbf{F}_i$ 是 $\prod_U \mathbf{F}_i'$ 的生成子框架，φ 在其中某个 w 上为假。因为在 $\prod_U \mathbf{F}_i'$ 中 $R((\langle a\rangle_{i\in I})_U w$ 成立（利用沃斯定理），所以，$L\varphi$ 在 $(\langle a\rangle_{i\in I})_U$ 上假。因此，$\prod_U \mathbf{F}_i' \not\models L\varphi$。因为 $L\varphi$ 不对超幂保持，因此，$L\varphi \notin \overline{M}1$。 ■

传递框架上是否实际上有 $M1 = \overline{M}1$，这是一个未解决的问题。

传递性允许各种复杂性归约。例如，$LMLMp \leftrightarrow LMp$ 和 $LMMp \leftrightarrow LMp$ 在这种情形下都是普遍有效的。这样只留有如下形式的模态算子序列：

$$M^i,\ M^iL,\ M^iLM,\ L^i,\ L^iM \text{ 和 } L^iML$$

（使用这两条归约原理以及它们的对偶 $MLMLp \leftrightarrow MLp$ 和 $MLLp \leftrightarrow MLp$。参见 [8]）至于模态归约原理，这样恰恰留有下述类型：

(1) M^iLM，$M^jL(j \geqslant 1)$

(2) M^iLM，$M^jLM(j \geqslant 1)$

(3) M^iLM，L^jML

(4) L^iM，$M^jL(i \geqslant 1, j \geqslant 1)$

(5) L^iM，$M^jLM(i \geqslant 1, j \geqslant 1)$

L^iM，L^jML = 类型（1），由一个明显的变换而得，

L^iML，M^jL = 类型（5），由一个明显的变换而得，

(6) L^iML，M^jLM

L^iML，L^jML = 类型（2），由一个明显的变换而得。

这些就是非一阶可定义性仅有的可能候选者：所有其他类型都是一阶可定义的，据定理 10.8 而得。但是，实际上所有这六种类型的模态归约原理在传递框架上都是一阶可定义的，它们的一阶等价公式在下表中给出[8]。

(1) $\forall y(R^i xy \wedge \forall z(Ryz \to \exists uRzu)) \to \exists v(R^j xv \wedge \forall w(Rvw \to (v = w \wedge Ryv))))$（参见关于 $LMp \to MLp$ 的特殊情形的定理7.4）。

(2)如果 $i \geqslant j: x = x$。如果 $i < j$,那么 $\forall y(R^i xy \to \exists zRyz) \vee \exists y(R^j xy \wedge \neg \exists zRyz)$。

(3) $\forall y(R^i xy \wedge \forall z(Ryz \to \exists uRzu)) \to \forall v(R^j xv \to \exists w(Rvw \wedge \forall s(Rws \to (s = w \wedge Ryw))))$。

(4) $\exists y(R^i xy \wedge \neg \exists zRyz) \vee \exists y(R^j xy \wedge \forall z(Ryz \to z = y))$。

(5) $\exists y(R^i xy \wedge \neg \exists zRyz) \vee \exists y(R^j xy \wedge \forall z(Ryz \to \exists uRzu))$。

(6) $\exists y(R^i xy \wedge \neg \exists zRyz) \vee \exists y(R^j xy \wedge \forall z(Ryz \to \exists uRzu))$。

这已穷尽了所有可能:

定理 11.9 在传递框架上，所有模态归约原理都在 $M1$ 中。

由此并不得出所有模态公式在传递性下都在$\overline{M}1$ 中。例如，$L(Lp \to p) \to Lp$（“洛伯公式”）仍然定义逆关系为良基关系的框架所组成的类，这一公式不是初等的。这个例子是在第 3 章中给出的，正如另一公式 $L(L(p \to Lp) \to p) \to p$（“达米特公式”）一样，后者甚至在传递的、自返的和连通的框架所组成的类上都不是一阶可定义的。后一个公式之所以有意思就在于它与直觉主义逻辑有联系。它公理化了能使直觉主义逻辑嵌入模态逻辑的哥德尔嵌入起作用的最强模态逻辑（比如比 $S4$ 还强!）（与第 6 章结合起来看，应当注意，达米特公式相对于有穷自返树的类是完全的，而洛伯公式相对于有穷禁自返树的类是完全的[67]）。

如下得到一个复杂性完全不同的归约。令 φ 是任意的模态公式。它的全部子公式列举为 φ_1，…，φ_k，并且对那些自身不是命题字母的公式 φ_i，取不在 φ 中出现的新命题字母 q_1，…，q_m。如果 φ_i 不是命题字母，令 $Q_i = q_i$；否则，令 $Q_i = \varphi_i$。然后构造出所有“连通公式”（connecting formulas）的合取。即

若 $\varphi_i = \neg \varphi_j$,则取$(Q_i \leftrightarrow \neg Q_j) \wedge L(Q_i \leftrightarrow \neg Q_j)$

若 $\varphi_i = \varphi_j \to \varphi_k$，则取$(Q_i \leftrightarrow (Q_j \to Q_k)) \wedge L(Q_i \leftrightarrow (Q_j \to Q_k))$

若 $\varphi_i = L\varphi_j$，则取$(Q_i \leftrightarrow LQ_j) \wedge L(Q_i \leftrightarrow LQ_j)$

称这个合取为 $Q(\varphi)$。

例如，$Q(LLLp \to p) = (q_1 \leftrightarrow Lp) \wedge L(q_1 \leftrightarrow Lp) \wedge (q_2 \leftrightarrow Lq_1) \wedge L(q_2 \leftrightarrow Lq_1) \wedge (q_3 \leftrightarrow Lq_2) \wedge L(q_3 \leftrightarrow Lq_2) \wedge (q_4 \leftrightarrow (q_3 \to p)) \wedge L(q_4 \leftrightarrow (q_3 \to p))$。注意，$Q(\varphi)$ 的模态度至多为2! 一旦理解了 $Q(\varphi)$ 的定义背后的技巧，下述结果就很容易证明。

引理 11.10 对于所有传递的一般框架 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle$ 和所有的 $w \in W$，对于所有的模态公式 φ，

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle \models \varphi[w]，当且仅当，\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle \models Q(\varphi) \to q[w],$$

这里 q 是上面构造中对应于 φ 本身的命题字母。

推论 11.11 对于任意的模态公式 ψ，可以能行地从 φ 构造一个模态度至多为 2 的模态公式 Ψ 使得在传递框架类上，$\varphi \in M1$，当且仅当，$\psi \in M1$。

换句话说，研究传递框架类上的一阶可定义性，只需考虑模态度至多为 2 的公式（模态度为 1 的公式无论如何总是一阶可定义的）。但事实上，上面的想法也可用来表明，在传递框架上的完全性理论中，只需考虑模态度至多为 2 的公理。

框架上关系条件的最出名的例子出现在直觉主义逻辑中。在那里，人们把注意力集中到自返传递的框架［有些作者还加上反对称，即 $\forall x \forall y(Rxy \wedge Ryx \rightarrow x = y)$］。但是还有另一个限制条件。赋值 V 必须满足这样的要求，即它们的值 $V(p)$ 对 R-后继封闭。这在几个方面使直觉主义公式的表现都比模态公式更好。例如[73]：

(i) 对于所有的框架 $\mathbf{F} = \langle W, R \rangle$，所有的 $w \in W$ 和 $\mathbf{F}$ 上的所有赋值 V，如果 $\langle \mathbf{F}, V \rangle \models \varphi[w]$，那么对于 w 所有的 R-后继 v，$\langle \mathbf{F}, V \rangle \models \varphi[v]$（换句话说，$\varphi \rightarrow L\varphi$ 成为普遍有效的）。

(ii) 对于所有的框架 $\mathbf{F} = \langle W, R \rangle$，所有的 $w \in W$ 和 $\mathbf{F}$ 上的所有赋值 V，如果 $\langle \mathbf{F}, V \rangle \models \varphi[w]$，那么存在 $\langle \mathbf{F}, V \rangle$ 的有穷子模型 $\mathbf{M}$ 使得 $\mathbf{M} \models \varphi\ [w]$。

(i) 一般对模态公式不成立（如考虑 $\neg p$）。检查斯莫林斯基的证明就可以表明，给定这种框架和赋值，(ii) 对所有模态公式都成立，（然而，它并非对任意赋值都成立，例如，如果 $\mathbf{F} = \langle IN, \leqslant \rangle$，并且 $V(p)$ 是奇数集，那么 $\langle \mathbf{F}, V \rangle \models LMp \wedge LM\neg p[0]$，但这个公式不在 $\langle \mathbf{F}, V \rangle$ 的任何有穷子模型中的 0 上成立）。

这个领域中要回答的第一个问题是：

“存在没有一阶等价公式的直觉主义公式吗?”

我们猜想它的答案是否定性的［无疑这个猜测一定已经由在中间逻辑 (intermediate logics) 领域中工作的人们表述出来］。为了对这里所讨论的公式类型有些印象，考虑下面的直觉主义原理。

(1) $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ ［从模态上说，就是 $L(Lp \rightarrow Lq) \vee L(Lq \rightarrow Lp)$］，由 $\forall y(Rxy \rightarrow \forall z(Rxz \rightarrow (Ryz \vee Rzy)))$ 定义。

(2) $(\neg p \rightarrow (q \vee r)) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow r))$：“凯斯勒－普特南公式”，从模态上说，就是 $L(L(L\neg Lp \rightarrow (Lq \vee Lr)) \rightarrow (L(L\neg Lp \rightarrow Lq) \vee L(L\neg Lp \rightarrow Lr)))$，由 $\neg \exists y \exists z(Rxy \wedge Rxz \wedge \neg Ryz \wedge \neg Rzy \wedge \forall u((Rxu \wedge Ruy \wedge Ruz) \rightarrow \exists v(Ruv \wedge \neg Ryv \wedge \neg Rzv)))$ 定义。

(3) $((\neg\neg p \rightarrow p) \rightarrow (p \vee \neg p)) \rightarrow (\neg\neg p \vee \neg p)$：“斯科特公式”，迄今还未找到它的一阶等价公式。

同时，上面这个问题已经得到肯定回答：斯科特公式不是一阶可定义的。但是，上述猜测对于所有无析取的公式还是成立的。更系统的信息可以在罗登伯格

的《直觉主义对应理论》中找到（P. Rodenburg. *Intuitionistic Correspondence Theory*. Mathematisch Instituut，University van Armsterdam，1982）。

相对对应理论的另一个可能领域是相干逻辑的语义，利用世界之间的三元关系，满足某些限制条件（并且赋值服从类似于上面的条件）。参见［27］，或者［38］中更为一般类型的问题。更多的例子，例如，条件句逻辑或者量子逻辑，都在《哲学逻辑手册》（Gabbay & Guenthner，eds. *Handbook of Philosophical Logic*，Vol. Ⅱ. Reidel Dordrencht. 1984）"对应理论"一章给出。

12 模态谓词逻辑

本章对于本书的主题而言像是一个附录。它的目的在于指出，如何把对应理论推广到较丰富的模态谓词逻辑（而不仅仅是模态命题逻辑）语言。

首先要选择合适的模态谓词语言。为简单起见，这里限于考虑带个体变项和谓词常元而不带其他种类变项及常元的通常的谓词逻辑语言。等词不包括在内。众所周知，个体常项和等词在这个研究领域中会带来（哲学上的）麻烦[36]。对这个谓词逻辑语言，增加模态算子 L 和 M 作为从公式到公式的一元算子。所产生的主要新鲜之处，就在于个体量词和模态算子的相互作用，如同在著名的巴坎公式 $\forall xLAx \to L\forall xAx$ 中那样。

在语义方面，世界现在将得到某种内部结构：它们拥有用来解释谓词的“个体域”。这里不存在普遍接受的语义，我们将要给出的语义仅仅是想要用作技术讨论的基础，而不是作为哲学范例。

定义 12.1 一个框架是由非空（“世界”）集 W 和 W 上的二元关系 R（“可及关系”）组成的有序对 $\langle W, R\rangle$。一个构架（skeleton）是一个三元有序组 $\mathbf{S} = \langle W, R, D\rangle$，这里 $\langle W, R\rangle$ 是框架，D 是以 W 为定义域，并且为每个世界 $w \in W$ 指派非空集 D_w（“w 的个体域”）的函数。一个模型是一个四元有序组 $\langle W, R, D, I\rangle$，其中，$\langle W, R, D\rangle$ 是构架，I 是以 W 为定义域并且对每个世界 $w \in W$ 指派个体域 D_w 上谓词逻辑语言的解释 I_w 的函数。

框架给出世界集的抽象模式。构架含有关于个体出现的信息：它们将是新对应理论的基本结构。注意，不同的世界也许会有相同的个体域。把构架定义为序对 $\langle D, R\rangle$，令 R 联系非空个体集，因此不太合适，因为它会意味着丢失某些识别的能力。最后，模型增加了解释，使模态谓词逻辑的公式能得到真值。

定义 12.2 令 φ 是模态谓词逻辑的公式。令 $\mathbf{M} = \langle W, R, D, I\rangle$ 是模型。$\mathbf{M} \models \varphi[w, A]$（“$\varphi$ 在 $\mathbf{M}$ 中 A 下 w 上成立”）是根据下列条款归纳定义的：对

于所有的 $w \in W$ 和把 x_i 映射到 $A(x_i) \in D_w (1 \leqslant i \leqslant n)$ 的指派，

（i）对于任意的 m 元谓词常项 P 和个体变项 y_1，…，y_m 的 m 元序组 $(m \geqslant 1)$，$\mathbf{M} \models Py_1 \cdots y_m[w, A]$，当且仅当，$\langle A(y_1), \cdots, A(y_m) \rangle \in I_w(P)$

（ii）$\mathbf{M} \models \neg \varphi[w, A]$，当且仅当，并非 $\mathbf{M} \models \varphi[w, A]$

（iii）$\mathbf{M} \models \varphi \to \psi[w, A]$，当且仅当，如果 $\mathbf{M} \models \varphi[w, A]$，那么 $\mathbf{M} \models \psi[w, A]$

（iv）$\mathbf{M} \models \forall x \varphi[w, A]$，当且仅当，对于所有的至多由于 $A'(x) \neq A(x)$ 而不同于 A 的指派 A'，$\mathbf{M} \models \varphi[w, A']$，这里 $A'(x)$ 在 D_w 中。

（v）$\mathbf{M} \models L\varphi[w, A]$，当且仅当，对于所有的 $v \in W$ 使得 Rwv 并且对 φ 的所有自由变项 y 有 $A(y) \in D_v$，$\mathbf{M} \models \varphi[v, A]$。

注意，还有许多定义语义解释的可能方式。上面的方式是我们做出的一个具体选择，许多作者认为这样定义有某种自然性。值得注意的是，（iv）的全称量词以在给定世界中所有对象为范围，即用哲学的行话说就是，对现实存在物（existents）量化，而不是对独立存在物（subsistents）量化。在技术上实现这一任务的另一种方式就是取单一的域 D，它为 W 中所有世界所共有，并且使用存在谓词 E 丰富该语言，E 在 w 上恰好对在 w 上“存在”的 $d \in D$ 是真的。

然后，（v）的必然算子以给定世界 w 的所有 R-后继为范围，它含有 $A(y)$，φ 相对于这些对象来赋值（使用日常语言的例子，“她总是生气”意思不是在所有时间点上她都在生气，而是说在她存在期间的所有时间点上她都在生气）。另外，存在谓词也提供了另一种获得这种解释的方式，甚至在带有无限制必然（L）的语言中也是如此。最后，关于 M 的对偶条款［对偶于（v）］也很容易得到表述：

（vi）$\mathbf{M} \models M\varphi[w, A]$，当且仅当，存在 $v \in W$，使得 Rwv 并对 φ 的所有自由变项 y 有 $A(y) \in D_v$，并且 $\mathbf{M} \models \varphi[v, A]$。

描述这种语义的方便的谓词逻辑语言有两个种类，一个是个体的种类，另一个是世界的种类。还有几个特指的谓词，即 R（指第二种的对象之间的二元关系）和 E（指第一种对象和第二种对象之间的二元关系）。今后，第二种对象之间的相等（=）也同样是有用的。此外，对于原来模态谓词逻辑语言的任何 m 元谓词常项 P，这个语言还有 $m+1$ 元谓词常项 P^*，它指相对化到世界的谓词 P。很像第 3 章，现在可以定义一个翻译，将模态公式翻译到这个两种类谓词逻辑语言的公式。

定义 12.3　令 u 是某个固定的第二种类变项。

（i）$ST(Py_1 \cdots y_m) = P^* u y_1 \cdots y_m$

（ii）$ST(\neg \varphi) = \neg ST(\varphi)$

（iii）$ST(\varphi \to \psi) = ST(\varphi) \to ST(\psi)$

(iv) $ST(\forall x\varphi)=\forall x(Exu\rightarrow ST(\varphi))$

(v) $ST(L\varphi)=\forall v(Ruv\rightarrow((Ey_1v\wedge\cdots\wedge Ey_mv)\rightarrow[v/u]ST(\varphi))$,

这里 v 是不同于 u 而且不在 $ST(\varphi)$ 中出现的、第二种类对象上的变项，而 y_1，…，y_m 是 φ 的自由个体变项。

由这个翻译的存在（和性质）可以得到一些结论，也许可以由理解了第3章的读者补充。对应理论在引进下面的概念时才真正出现。

定义 12.4 对于构架 $\mathbf{S}=\langle W, R, D\rangle$ 和 $w\in W$，如果对所有模型 $\mathbf{M}=\langle W, R, D, I\rangle$，$\mathbf{M}\models\varphi[w]$，则 $\mathbf{S}\models\varphi[w]$（"$\varphi$ 在 $\mathbf{S}$ 中 w 上成立"）。

在这个定义中，φ 被假定是模态谓词逻辑的句子；它允许我们从表述中的指派 A 进行抽象。注意，构架就是这样一个两种类谓词逻辑 L_0^+ 的结构，它仅有的谓词是上面引进的 R、$=$ 和 E。

定义 12.5 对模态谓词逻辑的句子 φ，并且对 L_0^+ 的带一个自由的世界变项的公式 α，$E^+(\varphi, \alpha)$ 成立，如果对于所有的构架 $\mathbf{S}=\langle W, R, D\rangle$ 和所有的 $w\in W$，$\mathbf{S}\models\varphi[w]$，当且仅当，$\mathbf{S}\models\alpha[w]$。$M1^+$ 是由所有这样的句子 φ 组成的集合：存在公式 α 使得 $E^+(\varphi, \alpha)$。

很容易验证巴坎公式是这个概念的例子：

$$E(\forall xLAx\rightarrow L\forall xAx, \forall v(Ruv\rightarrow\forall y(Eyv\rightarrow Eyu)))。$$

在给出更多的例子以前，我们表述一个守恒结果（conservation result）。请回顾定义 3.11。

定理 12.6 存在从模态谓词逻辑的句子 φ 到模态命题公式 $mp(\varphi)$ 的能行性翻译，使得如果 $E^+(\varphi, \alpha)$（其中 α 不含有 E）那么 $E(mp(\varphi), \alpha)$。

证明：定义 mp 为直接"剥去"谓词逻辑素材。形式上，令 $mp(Py_1\cdots y_m)=P$（现在把 P 看做命题字母），$mp(\neg\varphi)=\neg mp(\varphi)$，$mp(\varphi\rightarrow\psi)=mp(\varphi)\rightarrow mp(\psi)$，$mp(\forall x\varphi)=mp(\varphi)$，并且 $mp(L\varphi)=Lmp(\varphi)$。于是，设 $E^+(\varphi,\alpha)$，其中 α 如定义 12.5 所描述。要证明 $E(mp(\varphi),\alpha)$。

首先，令 $\mathbf{F}(=\langle W,R\rangle)\models\alpha[w]$。根据假定，$\langle W,R,D\rangle\models\varphi[w]$ 成立，与 D 的选择无关。然后选取函数 D'，对每个 $w\in W$，都指派相同的单元素集（比如说）$\{a\}$。要证明 $\mathbf{F}\models mp(\varphi)[w]$，即对 $\mathbf{F}$ 上任意赋值 V，$\langle\mathbf{F},V\rangle\models mp(\varphi)[w]$。因此，令 V 是 $\mathbf{F}$ 上任意赋值。定义解释 I_w 如下。对 m 元谓词常项 P，如果对相应的命题字母 p，$w\in V(p)$，$I_w(P)=\{\langle a,\cdots(m\text{ 次})\cdots,a\rangle\}$；否则，$I_w(P)=\varnothing$。因为 $\langle W, R,D',I\rangle\models\varphi[w]$，所以 $\langle\mathbf{F},V\rangle\models mp(\varphi)[w]$ 也成立。

其次，令 $\mathbf{F}(=\langle W,R\rangle)\models mp(\varphi)[w]$。要证明 $\mathbf{F}\models\alpha[w]$，只需就上述 D' 证明 $\langle W,R,D'\rangle\models\varphi[w]$，因为 $E^+(\varphi,\alpha)$。然后，令 I 是任何将这个构架变成模

型$\langle W,R,D',I\rangle$的解释。定义 $V(p)$ 是使得 $I_w(P)$ 非空的世界的集合。显然，对于这个赋值，$\langle \mathbf{F},V\rangle \models mp(\varphi)[w]$，像前面一样得出$\langle W,R,D',I\rangle \models \varphi[w]$。■

换句话说，我们不必指望新的 L_0-公式会成为模态可定义的。

这方面最重要的模态原理（除了巴坎公式以外）大概是交换原理：

（1）$L\forall xAx\to\forall xLAx$。

（2）$\exists xLAx\to L\exists xAx$。

（3）$L\exists xAx\to\exists xLAx$。

对于前两条，可以证明下面的等价命题：

$$E^+(L\forall xAx\to\forall xLAx, u=u)$$

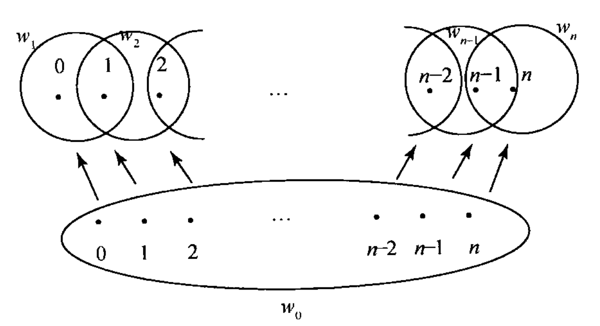
$$E^+(\exists xLAx\to L\exists xAx, \forall y(Eyu\to\forall v(Ruv\to Eyv)))。$$

第三个复杂一些。

引理 12.7　$L\exists xAx\to\exists xLAx\notin M1^+$。

证明：假定对某个 L_0^+-公式 $\alpha, E^+(L\exists xAx\to\exists xLAx,\alpha)$。利用紧致性定理，可以由此假定推导出矛盾。为明白这一点，考虑构架 $\mathbf{S}_n=\langle W_n,R_n,D_n\rangle$，使得 $W_n=\{w_0,\cdots,w_n\}, R_n=\{\langle w_0,w_i\rangle \mid 1\leqslant i\leqslant n\}; D_n$ 定义为 $D_n(w_0)=\{0,\cdots,n\}, D_n(w_i)=\{i-1,i\}(1\leqslant i\leqslant n)$。

注意，$\mathbf{S}_n\models L\exists xAx\to\exists xLAx[w_0]$［直观上，如果 $L\exists xAx$ 在 w_0 上成立，那么 $\exists xAx$ 在 w_1 上成立。于是，在 w_1 上，要么 Ax 对 0 成立，因此，LAx 在 w_0 上对 0 成立；要么 Ax 对 1 成立，那么，要么 Ax 在 w_2 上也对 1 成立。在这种情况下，LAx 在 w_0 上对 1 成立；要么 Ax 在 w_2 上对 2 成立，如此等等。继续这一讨论可以发现，要么 LAx 在 w_0 上对某个 $k<n$ 已经成为真的；要么 Ax 必须在 w_n 上对 n 成立，并且最终 $\exists xLAx$ 在 w_0 上是真的（因为 LAx 对 n 成立）］。另一方面，假如序列 w_1，w_2，$\cdots,w_n$，$\cdots$向右不确定地继续下去，那么 $L\exists xAx\to\exists xLAx$ 就会以一种明显的方式在 w_0 上是假的。此外，假如 u 的 R-后继链在两个方向上不确定地延伸，那它同样会是假的。



从这些观察可以得到所要求的论证；我们概述如下。令所需要的 $L\exists xAx\to\exists xLAx$ 的 L_0^+-等价公式 α 拥有自由世界变项 u。考虑由 α 和表达下述条件的公式所组成的 L_0^+-公式集 Σ：

（i） u 的所有 R-后继有一个两元素个体域；

（ii） u 的所有 R-后继的个体域都包含于 u 的个体域；

（iii） 如果 u 的两个不相同的 R-后继的个体域有共同对象，那么它们只有一个共同对象；

（iv） 恰好存在 u 的两个 R-后继与 u 的恰好另外一个 R-后继有重迭的个体域；所有其他后继都与 u 的恰好另外两个 R-后继有重迭的个体域；

$(\mathrm{v})_n$ u 至少有 n 个 R-后继（$n\geqslant 2$）。

Σ 的每个有穷子集都是可满足的，但是 Σ 自身不是可满足的：这就是所要的矛盾。因为，在 Σ 的任何模型中，u 将有一个 R-后继集合，这些 R-后继的个体域都允许按上述方式给出的 $L\exists xAx\to\exists xLAx$ 的反例。■

引理 12.7 应当与引理 9.7 和定理 10.2 进行比较。在模态谓词逻辑的领域中，模态度为 1 的公式不一定是一阶可定义的。这是由于一种可能的量词切换 $L\exists$、$\exists L$，令人想起 LM、ML，它们在句法结构（而不是语义结构）上是相似的。

$L\exists xAx\to\exists xLAx$ 在下面这样的模态谓词逻辑的语义中变成典型地普遍有效的原理，即对于基本个体，采取个体概念［也就是以 W 为定义域的函数，对每个 $w\in W$，指派一个对象 $f(w)\in D_w$］。那么它表达了某种形式的选择公理。

最后，也许要注意，在这里也可以证明 9.10 那样的翻译结果。为了表述一个例子，定义 U-公式乃是从原子公式仅利用 $\forall$ 和 L 构造的公式。

定理 12.8　对于每个模态谓词逻辑句子 $\varphi\to\psi$ 使得

（i） φ 是从 U-公式和 $\top$、$\bot$、$\wedge$、$\vee$、M 和 $\exists$ 构造起来的；

（ii） ψ 是从原子公式、$\top$、$\bot$、$\wedge$、$\vee$、$\forall$、$\exists$、L 和 M 构造起来的，

可以从 $\varphi\to\psi$ 构造出一个 L_0^+-等价公式。

13 模态公式的保持类

$\overline{M}_1^{def}$的定义（定义9.14）牵涉从满足特定条件 C 的一般框架到基础［“全(full)”］框架的保持。对于典范的模态逻辑，也给出了相似的定义（定义6.11）。形式上，这产生了通过某个条件 C 定义的“保持类”的概念。

定义13.1 $M(C)$ 是由所有这样的模态公式 φ 所组成的集：对于所有满足 C 的一般框架〈**F**，**W**〉，如果 φ 在〈**F**，**W**〉中成立，那么 φ 也在 **F** 中成立。

模态文献中研究这样的类的最早的例子，大概是托马森的类“E”[79]；法因[24]称之为“自然逻辑”。在这种情形下，条件 C 可以表述如下：

$$\langle \mathbf{F},\mathbf{W}\rangle \models \forall x \forall y(\forall P(Py \to Px) \to x = y)$$

（即“不可分辨物的同一”），并且

$$\langle \mathbf{F},\mathbf{W}\rangle \models \forall x \forall y(\forall P(Py \to \exists z(Rxz \wedge Pz)) \to Rxy)。$$

［注意，这两个二阶句子在所有（全）框架中都是真的］对 C 的选择进行限制就产生了萨奎斯特的“简单的逻辑”[66]。显然，当 C 为“空条件”时得到最简单的情形。

引理13.2 $M(-)$ 是等值于一个闭公式的模态公式的集合。

证明：显然，任何闭公式都在 $M(-)$ 中，因为这些公式对于从〈**F**，**W**〉到 **F** 的转换是不变的（请回顾一下，闭公式通过 ST 对应于 L_0-公式）。反之，假定 $\varphi \in M(-)$。由于注意到任何给定框架 **F** 上最小的一般框架〈**F**，**W**〉中，**W** 恰恰是由形如 $X = \{w \in W \mid \mathbf{F} \models \psi[w]\}$ 的集合 $X \subseteq W$ 组成的集合，这里，ψ 是闭模态公式。所以，可以用一种更方便的形式来表述。因此，$\varphi \in M(-)$，当且仅当，$CS(\varphi) \models \varphi$。其中，$CS(\varphi)$ 是 φ 的闭代入实例的集合（也就是对 $\varphi = \varphi(p_1, \cdots, p_n)$，$CS(\varphi) = \{[\psi_1/p_1, \cdots, \psi_n/p_n]\varphi \mid \psi_1, \cdots, \psi_n$ 是闭公式$\}$）（参见定理9.15的证明）。现在，根据紧致性，$CS(\varphi) \models \varphi$，当且仅当，$\varphi$ 为它的闭代入实例的某个有穷合取所蕴涵。由此得出，φ 等值于这个合取。■

我们可以从空条件开始，对强度递增的条件 C 分层构造类 $M(C)$。例如，在

通过如下条件生成的等级中，类 E 就会是 $M(C_1)$：

C_n：对于 $0\leqslant i\leqslant n, \forall x\forall y(\forall P(Py\rightarrow\exists z(R^i xz\wedge Pz))\rightarrow R^i xy)$ 在 $\langle\mathbf{F},\mathbf{W}\rangle$ 中是真的。

拉克兰（A. H. Lachlan）在［47］中表明是 E 递归可枚举的，并且包含在 $\overline{M}1$ 中。他的第一个结果可作如下推广。

引理 13.3 如果对于某个全称二阶句子 α，C 形如"$\langle\mathbf{F},\ \mathbf{W}\rangle\models\alpha$"，那么 $M(C)$ 是递归可枚举的。

证明： 拉克兰的想法在这种更一般的情形中同样奏效。它就在于在某个合适的（多种类）一阶语言中描述条件 C："如果 $\langle\mathbf{F},\ \mathbf{W}_1\rangle$ 是一般框架（可以写出三个闭包条件），它满足 α 以及 φ（这也可以写出来），那么任意一般框架 $\langle\mathbf{F},\ \mathbf{W}_2\rangle$ 也满足 φ。" ■

如果 α 在所有框架上成立，那么 $M(C)\subseteq\overline{M}1$。对于 E 的特殊情况，拉克兰把插值定理应用于上面的描述，获得 φ 的 L_0-等价公式，从而证明了这个结论。这里对在［30］中的（仍然是）E 的特殊情况，我们偏向一种更为一般的方法，而这样的方法还有待发现。

定理 13.4 令 Γ 是在所有框架中为真的一元二阶逻辑的句子的集合。对于条件 $C=$"$\langle\mathbf{F},\mathbf{W}\rangle\models\Gamma$"，$M(C)\subset\overline{M}1$。

证明： 从定理 8.6 的观点看，只需证明任意公式 $\varphi\in M(C)$ 对超积保持。因此，考虑满足 $\mathbf{F}_i\models\varphi$ 的框架 $\mathbf{F}_i$ 的集合 $\{\mathbf{F}_i\mid i\in I\}$ 和 I 上的超滤 U，要证明 $\mathbf{F}=\prod_U\mathbf{F}_i\models\varphi$。为弄清这一点，把这些同样的框架看做一般框架 $\langle\mathbf{F}_i,P(W_i)\rangle$，考虑这些框架的超积 $\langle\mathbf{F},\mathbf{W}\rangle$（参见定理 4.12 之后的讨论）。从这条定理得出 $\langle\mathbf{F},\ \mathbf{W}\rangle\models\varphi$，$\varphi$ 在所有因子 $\mathbf{F}_i$ 中真。此外，Γ 由在所有框架中为真［从而也在所有一般框架 $\langle\mathbf{F}_i,P(W_i)\rangle$ 中真］的句子组成，它在 $\langle\mathbf{F},\mathbf{W}\rangle$ 中真。但是，由于 $\varphi\in M(C)$，从而 $\mathbf{F}\models\varphi$。 ■

对于上面定义的 C_n，定理 13.4 蕴涵所有类 $M(C_n)$ 都包含在 $\overline{M}1$ 中。但是，它的逆不成立。

引理 13.5 $Lp\rightarrow MMp\in M1-\bigcup_{n\in IN}M(C_n)$。

证明： 定理 9.8 产生 $Lp\rightarrow MMp$ 的 L_0-等价公式 $\exists y(Rxy\wedge\exists z(Ryz\wedge Rxz))$。但是，现在考虑下面的一般框架 $\langle\mathbf{F},\ \mathbf{W}\rangle$。$W=IN$，$R=\{\langle m,\ n\rangle\mid$ 对某个奇数 k，$n=m+k\}$，$\mathbf{W}=\{X\subseteq IN\mid X$ 是有穷的或余有穷的$\}$。

(i) $Lp\rightarrow MMp$ 在 $\mathbf{F}$ 中不成立，但是，

(ii) $Lp\rightarrow MMp$ 在 $\langle\mathbf{F},\ \mathbf{W}\rangle$ 中成立，并且，

(iii) $\langle\mathbf{F},\ \mathbf{W}\rangle$ 满足所有条件 C_n。

(i) 是显然的。(ii) 由下述事实得出：如果$\langle \mathbf{F}, V\rangle \models Lp[n]$，那么 $V(p)$ 是无穷的，因此，(在 $\mathbf{W}$ 中) 是余有穷的。所以，对某个 m，$\{k \mid k \geq m\} \subseteq V(p)$，并且显然有$\langle \mathbf{F}, V\rangle \models MMp[n]$。最后，由一个老老实实的演算就可证明 (iii)。 ■

更重要的是，定理 13.4 为$\overline{M}1$ 提供了一种新的刻画。令 $UV2$ 是在所有框架中为真的基于 L_0 的一元二阶逻辑 (即 L_2) 的句子的集合。

定理 13.6　对于条件 $C =$ “$\langle \mathbf{F}, \mathbf{W}\rangle \models UV2$”，$\overline{M}1 = M(C)$。

证明： 从 13.4 得到 $M(C) \subseteq \overline{M}1$。对于相反方向，假定 $\varphi \in \overline{M}1$，换句话说，对某个 L_0-句子 α，$\overline{E}(\varphi, \alpha)$；或者，再换句话说，$\varphi \leftrightarrow \alpha \in UV2$。于是，如果$\langle \mathbf{F}, \mathbf{W}\rangle \models \varphi$，并且 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W}\rangle \models UV2$，那么 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W}\rangle \models \varphi \leftrightarrow \alpha$，因而 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W}\rangle \models \alpha$。由于 α 是 L_0-句子，故而可得 $\mathbf{F} \models \alpha$，再次根据 $\varphi \leftrightarrow \alpha$ 属于 $UV2$，$\mathbf{F} \models \varphi$。

■

已经证明的结果是，一阶可定义的模态公式恰恰是这样的公式：对于从“尽可能像框架一样的”一般框架到基础框架的转换不变的公式 [注意，13.6 的证明只使用了形如 $\forall x \forall P_1 \cdots \forall P_n ST(\varphi) \leftrightarrow \alpha$ 的 $UV2$-原理，这些原理等值于一个 $\Sigma_1^1(R)$ -句子和一个 $\Pi_1^1(R)$ -句子的合取。参见第 17 章]。

另一个有意思的保持类产生于如下选择

$$C = \text{“}\mathbf{W}\text{ 含有 }W\text{ 中所有单元素集合。”}$$

注意，这个条件蕴涵前面定义的所有 C_n。而且，$M(C) \subseteq \overline{M}_1^{def}$ (因为，所有单点集是使用参数在 $\mathbf{F}$ 中 L_0-可定义的集合；参见定义 9.14)。另一方面，$M(C) \neq \overline{M}_1^{def}$，引理 13.5 的公式 $Lp \to MMp$ 表明这一点 (要明白这一点，只要注意那里定义的集合 $\mathbf{W}$ 含有所有单点集)。由于另一个原因，这个类 $M(C)$ 也是有意思的。模态公式

$$LM^i \top \to L(L(Lp \to p) \to p)$$

属于 $M(C)$ (因此属于$\overline{M}_1^{def}$)，但是在定义 6.4 的意义上它不是完全的，定理 6.6 中证明了这一点。因此，它与完全性理论的明显的联系不成立。正如萨奎斯特在 [66] 中表明，定理 9.10 描述的所有模态公式都是完全的。由于所有这些公式一般都在$\overline{M}_1^{def}$中，因此，所有在$\overline{M}_1^{def}$中的公式都是完全的这个猜想似乎是合理的。很不幸，上面的公式就是一个反例。

一个全部由完全的公式组成的保持类的例子是 CAN，它定义为 M(“$\langle \mathbf{F}, \mathbf{W}\rangle$ 是描述的”) (参见定义 6.11)。但是，在第 6 章已经表明：$CAN \not\subseteq \overline{M}1$，再一次令我们失望。然而，$CAN$ 是一个非常重要的类，它将在第 16 章中得到进一步的研究。

最后，保持类给予我们$\overline{M}1$ 和 (在定义 6.4 的意义上) C 的一些有意思的子

集。甚至$\overline{M}1$ 自身都被刻画为一个保持类定理（13.6）。然而，对于 C，还不知道任何类似的结果。(从对应理论的观点看）一个更为有意思的集合是$\overline{M}1 \cap C$，根据第6章（8），$\overline{M}1 \cap C = \overline{M}1 \cap CAN$，因而它可写成两个保持类的交。所以，它自身是一个保持类，即 M(“$\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle \models UV2$ 或者 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle$ 是描述的”)。能否找到一个生成保持类$\overline{M}1 \cap C$ 的更自然、更精致的条件呢?



第三部分

模态可定义性

14 模态可定义的初等框架类

在第3章中，引入了模态公式和L_0-公式之间的局部等值关系E和全局等值关系$\overline{E}$（定义3.11）。这个定义可以推广到模态公式集Σ和L_0-公式集Δ。也有“混合”情形，总共产生四种组合：（i）φ，α，（ii）φ，Δ，（iii）Σ，α和（iv）Σ，Δ。第3章中已表明，如果一个模态公式（在任何一种意义下）等值于L_0-公式集Δ，那么它等值于Δ的某个有穷子集，即等值于单个L_0-公式（也就是那个有穷子集的合取）。因此，在某种意义上，情形（ii）可以划归为情形（i）。另一方面，情形（iv）不可化归，因为下面这样的Σ和Δ存在，即它们是等值的，但是没有单个模态公式或L_0-公式定义$FR(\Sigma)=FR(\Delta)$。下面是这种情形的一个全局例子[6]：

$$\Sigma=\{M^iL\bot\to L^iL\bot \mid i\geqslant 1\},$$
$$\Delta=\{\forall x(\exists y(R^ixy\wedge\neg\exists zRyz)\to\forall y(R^ixy\to\neg\exists zRyz\mid i\geqslant 1\}。$$

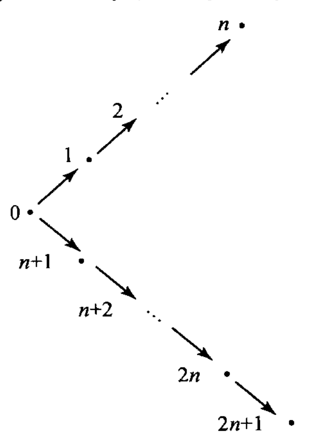


图 14-1

利用引理9.6，显然$\overline{E}$（Σ，Δ）。而且，没有L_0-句子α定义$FR(\Delta)$。因为，在那种情形下，$\Delta\models\alpha$，因此，根据紧致性，对某个有穷的$\Delta_0\subseteq\Delta$，$\Delta_0\models\alpha$。另一方面，由于对每个$\delta\in\Delta$，$\alpha\models\delta$，这就会得出，对每个$\delta\in\Delta$，$\Delta_0\models\delta$。然而，考虑图14-1中的框架$\mathbf{F}_n=\langle W_n, R_n\rangle$就可以反驳这一点：对$n\geqslant1$，$W_n=\{0, 1, \cdots, n, n+1, \cdots, 2n+1\}$，并且$R_n=\{\langle i,i+1\rangle\mid 0\leqslant i\leqslant n-1\}\cup\{\langle 0, n+1\rangle\}\cup\{\langle i, i+1\rangle\mid n+1\leqslant i\leqslant 2n\}$。

很容易验证，对每个i（$1\leqslant i<n$），

$$\mathbf{F}_n\models\forall x(\exists y(R^i xy\wedge\neg\exists zRyz)\rightarrow\forall y(R^i xy\rightarrow\neg\exists zRyz))。$$

但是

$$\mathbf{F}_n\not\models\forall x(\exists y(R^n xy\wedge\neg\exists zRyz)\rightarrow\forall y(R^n xy\rightarrow\neg\exists zRyz))：$$

看0。那么，显然没有Δ的有穷子集能蕴涵Δ的所有公式。最后，由于$FR(\Delta)$不能用单个L_0-句子定义，所以，它不能用单个模态公式（而不是集合Σ）定义。因为，假如它是这样，那么$FR(\Delta)$就会是L_0-初等的。

唯一余留下来的情形是Σ，α。很不幸，这种情形至今既没有归结到情形(i)，也还没有证明是不可归约的。因此，留下了一个一般的问题：

“是否存在定义一个L_0-初等框架类但是不能使用单个模态公式定义的模态公式集?”

对于一种特殊情形，(iii)可归约到(i)：也就是这样一种情形，一个L_0-句子等值于一个在[24]的意义上自然的集合Σ（参见第13章），也就是从使得

$$\forall x\forall y(\forall P(Py\rightarrow Px)\rightarrow x=y)$$

和

$$\forall x\forall y(\forall P(Py\rightarrow\exists z(Rxz\wedge Pz))\rightarrow Rxy)$$

成立的一般框架到基础全框架时保持的公式集。

引理14.1 如果对于一个自然的集合Σ和一个L_0-句子α，$\overline{E}(\Sigma, \alpha)$，那么对某个模态公式$\varphi$，$\overline{E}(\varphi, \alpha)$。

证明：这条引理可以利用第4章的代数方法来建立。我们考虑与Σ中公式对应的多项式等式的集合Σ^*，并且表明使这些等式成立的模态代数的类$\{\mathbf{A}\mid\mathbf{A}\models\Sigma^*\}$可以使用有穷多个这样的等式来定义。那么，相对应的模态公式的合取将定义$FR(\Sigma)$。

要证明使用单个多项式等式可以定义$\{\mathbf{A}\mid\mathbf{A}\models\Sigma^*\}$，只需证明补类$\{\mathbf{A}\mid\mathbf{A}\not\models\Sigma^*\}$对超积封闭。因为，根据凯斯勒对初等类的刻画，使用单个公式α（自身不一定是多项式等式）可以定义$\{\mathbf{A}\mid\mathbf{A}\models\Sigma^*\}$。根据紧致性，由于$\alpha$是$\Sigma^*$的逻辑后承，因此，它从某个有穷的$\Sigma_0\subseteq\Sigma^*$得出。反之$\alpha$蕴涵$\Sigma^*$中的

每个等式。换句话说，Σ_0 定义 $\{\mathbf{A} \mid \mathbf{A} \models \Sigma^*\}$。

于是，对于每个 $i \in I$，令 $\mathbf{A}_i \not\models \Sigma^*$，并且令 U 是 I 上任意的超滤。要证明 $\prod_U \mathbf{A}_i \not\models \Sigma^*$。回顾第 4 章中的斯通表示：每个 $\mathbf{A}_i$ 同构于 $SR(\mathbf{A}_i)^+$。这里，$SR(\mathbf{A}_i)$是一般框架 $\langle \mathbf{F}_i, \mathbf{W}_i \rangle$（参见定义 4.5）。而且，$SR(\mathbf{A}_i)$ 是描述的，意思是，尤其上面提到的两个二阶句子都在这个一般框架中成立。注意，进一步有 $\langle \mathbf{F}_i, \mathbf{W}_i \rangle \not\models \Sigma$，因此，$\mathbf{F}_i \not\models \Sigma$，所以 $\mathbf{F}_i \models \neg \alpha$。

现在，考虑超积 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle = \prod_U \{\langle \mathbf{F}_i, \mathbf{W}_i \rangle \mid i \in I\}$（参见定义 4.11）。根据沃斯定理，$\neg \alpha$ 和上面提到的二阶句子都在$\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle$ 中成立。但是，$\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle \not\models \Sigma$。因为，否则，$\mathbf{F} \models \Sigma$（$\Sigma$是自然的），并且 $\mathbf{F} \models \alpha$，矛盾。

最后，要看出$\prod_U \mathbf{A}_i \not\models \Sigma^*$，只需注意到$\prod_U \mathbf{A}_i = \prod_U \langle \mathbf{F}_i, \mathbf{W}_i \rangle^+ \cong (\prod_U \langle \mathbf{F}_i, W_i \rangle)^+$（根据定理 4.13）。■

很不幸，引理 14.1 并没有完全解决我们的问题。如果$\overline{E}(\Sigma, \alpha)$，那么$\Sigma$不一定是自然的。的确，$FR(\alpha)$ 不一定能够用某个自然的Σ定义。例如，回顾这样一个事实（参见第 7 章），对下面的 φ 和 α，$\overline{E}(\varphi, \alpha)$：

$$\varphi = (Lp \rightarrow LLp) \wedge (LMp \rightarrow MLp)$$

$$\alpha = \forall x(\forall y(Rxy \rightarrow \forall z(Ryz \rightarrow Rxz)) \wedge \forall x \exists y(Rxy \wedge \forall z(Ryz \rightarrow z = y)))。$$

假定对某个自然的Σ，$\overline{E}(\Sigma, \alpha)$。那么，$\varphi$ 在定义 9.4 的意义上是完全的[68]。因此，由于对每个 $\sigma \in \Sigma$，$\varphi \models_f \sigma$。所以，对每个 $\sigma \in \Sigma$，$\varphi \models_{gf} \sigma$。由此，$\varphi$ 必定是自然的。因为，假定它在某个满足相关条件的一般框架上成立，Σ也将在这个一般框架上成立，由于Σ是自然的，所以它在基础框架上成立。那么，α 显然在那里成立，因此，φ 也在那里成立。但是，现在就有一个矛盾，因为从定理 9.17 证明中给出的例子得出，φ 不是自然的。

关于对某个 L_0-句子 α 有Σ满足$\overline{E}(\Sigma, \alpha)$，唯一能说的东西是，$FR(\Sigma)$ 也通过典范集 $C(\Sigma)$（参见定义 6.11、6.8）定义［$C(\Sigma)$ 是典范集这一点是由于它是一阶可定义的和完全的而得出的，参见推论 16.7］。于是，上述 φ 的例子表明，并非所有的典范集Σ都是自然的[24]。

在第二部分中，等值关系 E 和$\overline{E}$的“模态方面”以 $M1$ 和$\overline{M}1$ 的形式得到了研究。现在，“谓词逻辑方面”是研究的主题。回顾相关定义（定义 3.11）：

$P1 = \{\alpha \mid \alpha$ 是带一个自由变项的 L_0-公式，使得对某个模态公式 $\varphi, E(\varphi, \alpha)\}$；

$\overline{P}1 = \{\alpha \mid \alpha$ 是 L_0-句子，使得对某个模态公式 φ，$\overline{E}(\varphi, \alpha)\}$。

从 L_0-的观点看，局部概念是没有什么意思的，并且 $P1$ 因此较少引起注意。主要结果是全局类$\overline{P}1$ 的语义刻画，这个结果归于戈德布拉特和托马森[31]，参见下面的定理 14.7。然而，我们从某个关于 $P1$ 的简单观察开始。

引理 14.2　如果 α 和 β 是带有唯一的相同的自由变项 x 的 L_0-公式，那么

(i) 如果 $\alpha \in P1$ 并且 $\beta \in P1$，那么 $\alpha \wedge \beta \in P1$；

(ii) 如果 $\alpha \in P1$ 并且 $\beta \in P1$，那么 $\alpha \vee \beta \in P1$；

(iii) 如果 $\alpha \in P1$，那么 $\forall x(Ryx \rightarrow \alpha) \in P1$，只要 y 不同于 x。

证明：根据引理 9.1 得出 (i)；(ii) 也是如此：如果 $E(\varphi, \alpha)$，并且 $E(\psi, \beta)$，则将 φ 中的命题字母换成不在 ψ 中出现的新字母。这样就产生 φ'，并且 $E(\varphi' \vee \psi, \alpha \vee \beta)$。最后，如果 $E(\varphi, \alpha)$，那么 $E(L\varphi, \forall x\ (Ryx \rightarrow \alpha))$（参见推论 9.2）。■

引理 14.3　$P1$ 不对否定封闭；$P1$ 不对受限特称量化封闭。

证明：$Rxx \in P1$，因为 $E(Lp \rightarrow p, Rxx)$。另一方面，$\neg Rxx \notin P1$。这一点从 $\langle IN, <\rangle$ 的例子和它到 $\langle \{0\}, \{\langle 0,0\rangle\}\rangle$ 上的 p-态射 f 得出，这里 f 定义为：对所有 $n \in IN, f(n)=0$，因为 $\langle IN, <\rangle \models \neg Rxx[0]$。但是 $\langle \{0\}, \{\langle 0,0\rangle\}\rangle \not\models \neg Rxx[f(0)]$（并且应用推论 2.18）。

（根据推论 2.31）$\forall x \exists y(Rxy \wedge Ryy)$ 不在 $P1$ 中的证明，可以修改这个证明来表明 $\exists y(Rxy \wedge Ryy)$ 不在 $P1$ 中。这就证明了第二个断定。■

利用定理 9.8 和定理 9.10，以构造性的方式可以描述 $P1$ 的一个重要子类。这里将只证明一个非常小的部分结果。首先，需要一个辅助概念。

定义 14.4　一个 $\forall$-公式就是带一个自由变项的 L_0-公式，它形如 $U\alpha$，这里 U 是（可能空的）受限全称量词序列，并且 α 是只有原子公式和布尔算子 $\wedge$、$\vee$ 出现的 L_0-公式。

文献中出现的许多关系条件都可使用 $\forall$-公式来表达，例如，自返性（Rxx）、对称性 $[\forall y(Rxy \rightarrow Ryx)]$ 和传递性 $[\forall y(Rxy \rightarrow \forall z(Ryz \rightarrow Rxz))]$。而且，给定一个数 n，没有多于 n 个 R-不可比较的 R-后继，这种经常提到的性质也是这样可定义的：

$$\forall y_1(Rxy_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \forall y_n(Rxy_n \rightarrow \forall y_{n+1}(Rxy_{n+1} \rightarrow \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n+1} y_i = y_j \vee Ry_iy_j))\cdots)$$

引理 14.5　每个 $\forall$-公式都有一个可以从它构造性地得到的模态等价公式。

证明：考虑任意的 $\forall$-公式 $U\alpha$。利用命题分配律，将 α 改写成原子公式的析取 α_i 的合取 $\prod_{i=1}^{n}\alpha_i$。由于 $U\alpha$ 等值于 $\prod_{i=1}^{n}U\alpha_i$，根据引理 14.2，只需考虑合取支 $U\alpha_i$。现在将 $U\alpha_i$ 改写成形如"$\neg$ －受限特称量词序列－否定原子公式的合取"的公式 β_i。从这个合取中移去重复的合取支，并从其中出现的形如 $\neg\ 1x=y$、$\neg\ y=x$ 的各对公式中去掉一个公式。最后，为每个量词提供唯一的约束变项。

对于出现在 β_i 中的各个约束变项 y，归纳地构造一个树 $T(y)$。如果 β_i 中没有形如 $\exists z(Ryz \wedge$ 的受限特称量词出现，那么 $T(y)$ 就只由单个结点 y 构成。否

则，$T(y)$ 是从树 $T(z_1)$，…，$T(z_m)$ 通过将它们的顶点联结到新结点 y 而构造起来的，这里 z_1，…，z_m 就是 $\exists z(Ryz \wedge$ 在 β_i 中出现的变项。公式 $\forall y(Rxy\to \forall u(Rxu\to \forall v(Ruv\to \forall Ryv)))$ 提供了一个例子。将它改写成 $\neg\exists y(Rxy\wedge\exists u(Rxu\wedge\exists v(Ruv\wedge\neg Ryv)))$ 就产生树（图 14-2）：

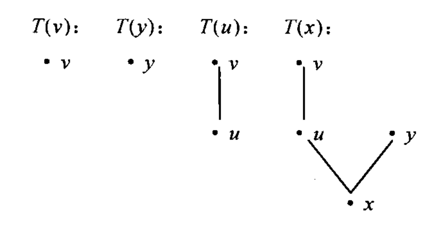


图 14-2

对于树 $T(x)$ 中每个结点 y（这里 x 是 $U\alpha$ 中那个唯一的自由变项），归纳地定义模态公式 $\mathbf{mod}(y)$ 为下述公式的合取：

（i）对于 y 的每个直接后继 z，$M\mathbf{mod}(z)$；

（ii）对于出现在 β_i 的命题母式中的每个公式 $\neg Ryz, Lp_{yz}$；

（iii）对于出现在 β_i 的命题母式中的每个公式 $\neg Rzy, \neg p_{zy}$；

（iv）对于出现在 β_i 的命题母式中的每个公式 $\neg y=z, q_{yz}$；

（v）对于出现于 β_i 的命题母式中的每个公式 $\neg z=y, \neg q_{zy}$；

或者

（vi）如果上述合取是空的，那么 $\top$。

（命题字母 p 和 q 的下标表明对相应的规则选取不同的命题字母）例如，在上述例子中，$\mathbf{mod}(y)=Lp_{yv}$，$\mathbf{mod}(v)=\neg p_{yv}$，$\mathbf{mod}(u)=M\neg p_{yv}$，$\mathbf{mod}(x)=MM\neg p_{yv}\wedge MLp_{yv}$。

等值于 $U\alpha_i$ 的模态公式是 $\neg\mathbf{mod}(x)$。注意下述事实就很容易表明这一点，即对于所有的框架 $\mathbf{F}=\langle W, R\rangle$ 和所有的 $w\in W$，$\mathbf{F}\not\models U\alpha_i[w]$，当且仅当，对 $\mathbf{F}$ 上的某个赋值 V，$\langle\mathbf{F}, V\rangle\models\mathbf{mod}(x)\ [w]$。因此，比如上面的 L_0－公式等值于 $\neg(MM\neg p_{yv}\wedge MLp_{yv})$，即等值于 $MLp_{yv}\to LLp_{yv}$。 ■

下面将要研究 $\overline{P}1$ 这个类，它有更优雅的模型论研究。注意 $P1\subseteq\overline{P}1$（对于“$\overline{P}1\subseteq P1$”这个相反的结果，似乎没有非常自然的表述）。像 $P1$ 一样，$\overline{P}1$ 对合取和全称量化封闭。然而，它不对析取封闭。例如，考虑 $\forall xRxx$ 和 $\forall x\forall y(Rxy\to Ryx)$，它们都在 $\overline{P}1$ 中。但它们的析取 $\forall xRxx\vee\forall x\forall y(Rxy\to Ryx)$ 不在 $\overline{P}1$ 中，因为这个析取不对不相交并保持（例如，这个句子在 $\langle\{0\},\varnothing\rangle$ 和 $\langle\{0,1\},\{\langle 0,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 1,1\rangle\}\rangle$ 中都成立，但是在它们的不相交并中不成立）。

为了陈述对$\overline{P}1$的语义刻画，下面的概念是有用的。

定义 14.6 一个框架类 **K** 是模态可定义的，如果存在某个模态公式集Σ使得 $\mathbf{K}=FR(\Sigma)$。

定理 14.7 （［31］，参见 2.28）如果一个框架类 **K** 对（L_0-）初等等价封闭，那么 **K** 是模态可定义的当且仅当 **K** 对生成子框架、不相交并和 p-态射像封闭，而它的补类$^c\mathbf{K}$对超滤扩充封闭。

证明：如果 **K** 是模态可定义的，那么 **K** 和$^c\mathbf{K}$满足提到的封闭条件，分别由推论 2.12、推论 2.15、推论 2.18 和推论 2.26 得出。如果 **K** 和$^c\mathbf{K}$满足这些封闭条件（这蕴涵 **K** 也对超滤扩充封闭，由定理 8.9 可得），那么后面定理 16.5 的条件得到满足，并且 **K** 被证明可以使用一个模态公式集定义，这个集合甚至是典范的。 ■

对于由一个模态公式集定义的 L_0-句子的类$\overline{P}1'$，定理 14.7 蕴涵推论 14.8：

推论 14.8 对于任意的 L_0 - 句子 α，$\alpha\in\overline{P}1'$，当且仅当，α 对生成子框架、不相交并和 p-态射像保持，而$\neg\alpha$ 对超滤扩充保持。

对于$\overline{P}1'$“本身（sec）”，可以在［30］中找到一种语义刻画（定理 20.10）。但是，所涉及的其他概念（“完全超积”）就不像以上出现的那些概念那么自然（和优雅）。因此，这里从略。

推论 14.8 为引理 14.5 的全局版本给出了模型论证明。令 α 为任何形如$\forall x\beta$的 L_0-句子，这里β是定义 14.4 意义上的$\forall$-公式。在第 15 章中将要表明，这样的公式 α 对生成子框架、不相交并和 p-态射像保持。而且，$\neg\alpha$ 等值于一个特称的 L_0-句子，因而对超滤扩充保持［利用这样一个事实，即对每个框架 **F**，$ue(\mathbf{F})$都（同构于）**F** 的一个扩充。参见引理 2.27］。当然，这个证明是高度非构造性的。

15 一阶公式的保持结果

在本章中将证明 L_0-公式相对于迄今已引进的框架上的主要语义运算的一些保持结果。这将得到关于 $P1$ 和 $\overline{P}1$ 的句法信息，正如从下面的推论 15.5 和 15.6 中可以看到的那样。实际上，我们可以期望一个完整的刻画。不过，这些结果没有一个是已经被发现的。关于 $P1$ 或 $\overline{P}1$ 的隶属关系的必要句法条件是可取得的，但必要而充分的条件则不可。实际上，$P1$ 和 $\overline{P}1$ 是否至少是递归可枚举的这一问题还是未解决的。洛伯猜测，$M1$（$\overline{M}1$）和 $P1$（$\overline{P}1$）是互相递归的。这将使对 $\overline{M}1$ 的算术可定义性的怀疑（表达在第 7 章中）转移到 $\overline{P}1$ 上。另一方面，也不要指望会从全称二阶语句这一较一般而易处理的情形中得到任何引人深思的结果（参看定理 17.10）。的确，不存在任何 $\overline{P}1$ 到这领域的推广。

下述结果的证明主要在于构造初等链，如同定理 3.9 的证明中那样。饱和结构同样也可用（参看［17］，第 5 章），但不会因该方法包含更多的技术细节而带来任何新的洞见。

最初的概念和结果都跟 $P1$ 有关。

定义 15.1（参看引理 11.4）　一个 L_0-公式 $\alpha = \alpha(x_1, \cdots, x_n)$ 对生成子框架不变，是指对于所有的满足 $\mathbf{F}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathbf{F}_2$ 的框架 $\mathbf{F}_1(=\langle W_1, R_1\rangle)$ 和 $\mathbf{F}_2$，并且对于所有的 $w_1, \cdots, w_n \in W_1$，

$$\mathbf{F}_1 \models \alpha[w_1, \cdots, w_n]，当且仅当，\mathbf{F}_2 \models \alpha[w_1, \cdots, w_n]。$$

定义 15.2　一个 L_0-公式 $\alpha = \alpha(x_1, \cdots, x_n)$ 是对 p-态射保持的，是指对于所有的框架 $\mathbf{F}_1(=\langle W_1, R_1\rangle)$ 和 $\mathbf{F}_2$、所有从 $\mathbf{F}_1$ 到 $\mathbf{F}_2$ 上的 p-态射 f 以及所有的 $w_1, \cdots, w_n \in W_1$，

$$若 \mathbf{F}_1 \models \alpha[w_1, \cdots, w_n]，则 \mathbf{F}_2 \models \alpha[f(w_1), \cdots, f(w_n)]。$$

定义 15.3　令 L 是一个含有固定的二元谓词常项 R 的一阶语言。L 的受限正公式就是从 $\perp$ 和原子公式（带或不带个体常项）利用 $\wedge$、$\vee$、受限全称量词

$\forall y(Rty\rightarrow$和受限特称量词$\exists y$（$Rty\wedge$（这里 t 是一个个体常项或不同于 y 的个体变项）构造起来的公式。

定理 15.4 任意一个 L_0-公式对生成子框架不变并对 p-态射保持，当且仅当，它逻辑等值于一个带同样自由变项的受限正 L_0-公式。

证明：从右至左的方向可以由随后两个断定推出，这两个断定都很容易施归纳于公式的复杂度上来证明。L_0 的任意一个受限（正）公式都对生成子框架不变。L_0 的任意一个受限正公式都对 p-态射保持。

现在，令 L_0-公式 $\alpha=\alpha(x_1,\cdots,x_n)$ 对生成子框架不变，并且对 p-态射保持。定义 $RP(\alpha)$ 为

$$\{\beta\mid\beta=\beta(x_1,\cdots,x_n)\text{ 是满足 }\alpha\models\beta\text{ 的受限正 }L_0\text{-公式}\}。$$

将要证明的是 $RP(\alpha)\models\alpha$。在此之后，紧致性定理就产生蕴涵 α 的有穷多个 $\beta_1,\cdots,\beta_m\in RP(\alpha)$，因而 α 逻辑等值于 $\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_m$。

于是，假定 $\mathbf{F}_1^1\models RP(\alpha)[w_1,\cdots,w_n]$。附加新的个体常项 $\mathbf{w}_1,\cdots,\mathbf{w}_n$ 到 L_0 中，得到一个一阶语言 L_1，并通过将各个 $\mathbf{w}_i$ 解释为 w_i 而把 $\mathbf{F}_1^1$ 膨胀成一个 L_1-结构 $\mathbf{F}_1$（注意：在本章的余下部分，"L_1" 并不指第一部分中的那个一阶语言，而只是指在相关证明中需要的某个纯粹特设的一阶语言）。

$\Sigma=\{[\mathbf{w}_1/x_1,\cdots,\mathbf{w}_n/x_n]\alpha\}\cup\{\neg\beta\mid\beta$ 是使得 $\mathbf{F}_1\models\neg\beta$ 的受限正 L_1-语句$\}$ 的各个有穷子集都有模型。否则，将对如所描述的某些 $\neg\beta_1$、$\cdots$、$\neg\beta_k$ 有 $[\mathbf{w}_1/x_1,\cdots,\mathbf{w}_n/x_n]\alpha\models\neg(\neg\beta_1\wedge\cdots\wedge\neg\beta_k)$。从而有 $[\mathbf{w}_1/x_1,\cdots,\mathbf{w}_n/x_n]\alpha\models\beta_1\vee\cdots\vee\beta_k$。但是 $\beta_1\vee\cdots\vee\beta_k$ 是一个受限正 L_1-语句。此外，$\alpha\models[x_1/\mathbf{w}_1,\cdots,x_n/\mathbf{w}_n](\beta_1\vee\cdots\vee\beta_k)$（每当必要时将 $\beta_1\vee\cdots\vee\beta_k$ 中的约束变项 x_i 改名即可）（诸如此类跟变项的可代入性有关的小细节今后都将予以忽略）。换句话说，

$$\beta=[x_1/\mathbf{w}_1,\cdots,x_n/\mathbf{w}_n](\beta_1\vee\cdots\vee\beta_k)\in RP(\alpha);$$

因而有 $\mathbf{F}_1^1\models\beta[w_1,\cdots,w_n]$ 和 $\mathbf{F}_1\models\beta_1\vee\cdots\vee\beta_k$，矛盾于 $\mathbf{F}_1\models\neg\beta_1$、$\cdots$、$\mathbf{F}_1\models\neg\beta_k$ 的事实。由紧致性定理可知，Σ 有模型，设为 $\mathbf{G}_1$（从现在起，大写字母 "**F**" 和 "**G**"，可能带下标与/或上标，将被用来指框架，可能带有特指的元素）。这样产生下述情景：

框架：	$\mathbf{F}_1^1$，	$\mathbf{F}_1$
		$\uparrow$
		$\mathbf{G}_1$，
语言：	L_0，	L_1

图 15-1

其中，

并且

(ii) $\mathbf{G}_1 - RP(L_1) - \mathbf{F}_1$；这记号缩写的是“$L_1$ 的所有在 $\mathbf{G}_1$ 中为真的受限正语句也都在 $\mathbf{F}_1$ 中为真”。

从这一情景开始，将构造出初等链 $\mathbf{F}_1$，$\mathbf{F}_2$，…和 $\mathbf{G}_1$，$\mathbf{G}_2$，…，以及递增的一阶语言序列 L_1，L_2，…。总的方法如下。

令语言 L_n 已给定，并且 $\mathbf{F}_n$ 和 $\mathbf{G}_n$ 满足 $\mathbf{G}_n - RP(L_n) - \mathbf{F}_n$。对于满足 $\mathbf{G}_n \models Rcx[w]$ 的 L_n 中的各个个体常项 c 和 $\mathbf{G}_n$ 个体域中的各个 w，附加一个新的个体常项 $\mathbf{w}$ 到 L_n 中，最后得到一个语言 L_n^1。通过将各个 $\mathbf{w}$ 解释为 w 使 $\mathbf{G}_n$ 膨胀成一个 L_n^1-结构 $\mathbf{G}_n^1$。

$\Delta = \{\beta \mid \beta$ 是满足 $\mathbf{G}_n^1 \models \beta$ 的受限正 L_n^1-语句$\}$ 的各个有穷子集都有为 $\mathbf{F}_n$ 的膨胀的模型。因为，令 β_1，…，$\beta_k \in \Delta$，含有来自 $L_n^1 - L_n$ 的常项（总计）为 $\mathbf{w}_1$，…，$\mathbf{w}_s$。存在有 L_n 的常项 c_1，…，c_s 使得对不在 β_1，…，β_k 中出现的变项 x_1，…，x_s 有

$$\mathbf{G}_n \models Rc_1x_1 \wedge \cdots \wedge Rc_sx_s \wedge [x_1/\mathbf{w}_1, \cdots, x_s/\mathbf{w}_s](\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k)[w_1, \cdots, w_s]$$

因此，

$$\mathbf{G}_n \models \exists x_1(Rc_1x_1 \wedge \cdots \wedge \exists x_s(Rc_sx_s \wedge [x_1/w_1, \cdots, x_s/w_s](\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k))\cdots)。$$

这公式是一个受限正 L_n-语句（！），因而在 $\mathbf{F}_n$ 中成立，由 $\mathbf{G}_n - RP(L_n) - \mathbf{F}_n$ 而得。由此易得所要的断言。于是一个标准的模型论论证现在就可确定 Δ 有一个模型 $\mathbf{F}_n^1$，使得

(i) $\mathbf{F}_n^1$ 是一个 L_n^1-结构，

(ii) $\mathbf{F}_n \prec_{L_n} \mathbf{F}_n^1$；即，$\mathbf{F}_n$ 是 $\mathbf{F}_n^1$ 的一个 L_n-初等子结构；

以及

(iii) $\mathbf{G}_n^1 - RP(L_n^1) - \mathbf{F}_n^1$。

这可以图示为

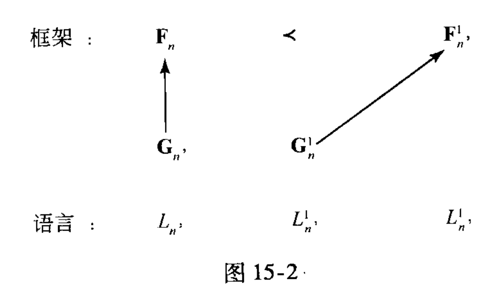


图 15-2

接着来的是对偶的构造步骤。

对于满足 $\mathbf{F}_n^1 \models Rcx[w]$、$L_n^1$ 的各个个体常项 c 和 $\mathbf{F}_n^1$ 个体域中的各个 w，附加

一个新的个体常项 k_{cw} 到 L_n^1，最终得到 L_{n+1}。通过将各个 k_{cw} 解释为 w 使 $\mathbf{F}_n^1$ 膨胀成一个 L_{n+1}-结构 $\mathbf{F}_{n+1}$（如上使用 k_{cw} 而不仅仅使用 w 就变得很清楚了）。

$\mathbf{\Gamma}=\{\neg\beta\mid\beta$ 是满足 $\mathbf{F}_{n+1}\models\neg\beta$ 的受限正 L_{n+1}-语句$\}\cup\{Rck_{cw}\mid k_{cw}$ 是 $L_{n+1}-L_n^1$ 中的常项$\}$ 的各个有穷子集有为 $\mathbf{G}_n^1$ 的膨胀的模型。为了明白这一点，令 $\neg\beta_1,\cdots,\neg\beta_k\in\mathbf{\Gamma}$ 并考虑任意一个有穷集 $Rc_1k_{c_1w_1},\cdots,Rc_sk_{c_sw_s}$。如果 $\neg\beta_1,\cdots,\neg\beta_k$ 含有不同于 $k_{c_1w_1},\cdots,k_{c_sw_s}$ 的、来自于 $L_{n+1}-L_n^1$ 的常项 k_{cw}，则可以附加相关的 Rck_{cw}。因此，可以假定出现于 $\neg\beta_1,\cdots,\neg\beta_k$ 中的所有来自 $L_{n+1}-L_n^1$ 的常项都在 $k_{c_1w_1},\cdots,k_{c_sw_s}$ 之中。现在，假定 $\{\neg\beta_1,\cdots,\neg\beta_k,Rc_1k_{c_1w_1},\cdots,Rc_sk_{c_sw_s}\}$ 在 $\mathbf{G}_n^1$ 的任意一个膨胀中都不是可满足的。由此可知，对任意一个不在 $\neg\beta_1,\cdots,\neg\beta_k$ 中出现的变项序列 $x_1,\cdots,x_s$，

$$\mathbf{G}_n^1\models\forall x_1(Rc_1x_1\to\cdots\to\forall x_s(Rc_sx_s\to[x_1/k_{c_1w_1},\cdots,x_s/k_{c_sw_s}](\beta_1\vee\cdots\vee\beta_k))\cdots)$$

而且，这个受限正 L_n^1-语句在 $\mathbf{F}_n^1$ 中成立。因为，$\mathbf{G}_n^1-RP(L_n^1)-\mathbf{F}_n^1$。但是，这与 $\mathbf{F}_n^1\models Rc_1x_1\wedge\cdots\wedge Rc_sx_s\wedge[x_1/k_{c_1w_1},\cdots,x_s/k_{c_sw_s}](\neg\beta_1\wedge\cdots\wedge\neg\beta_k)[w_1,\cdots,w_s]$ 矛盾（这结论可由各个语句 $Rc_ik_{c_iw_i}$ 在 $\mathbf{F}_{n+1}$ 中成立这一事实得出，即 $\mathbf{F}_n^1\models Rc_ix_i[w_i]$，并且据所设可知各个语句 $\neg\beta$ 在 $\mathbf{F}_{n+1}$ 中成立）。

此处应当给出两点说明。首先，用常项 k_{cw} 而不用 $\mathbf{w}$ 是为了避免出现下述情景。对于 $\{\neg\beta(\mathbf{w}),Rc_1\mathbf{w},Rc_2\mathbf{w}\}$，上述讨论将会产生公式 $\forall y(Rc_1y\to(Rc_2y\to\beta(y)))$，这不是一个受限正公式。换一种说法就是，我们不能谈论"共同的 R-后继"：$\{\neg\beta(k_{c_1w}),\neg\beta(k_{c_2w}),Rc_1k_{c_1w_1},Rc_2k_{c_2w}\}$ 是最好的逼近（参看紧随定理 3.9 的证明之后的说明）。其次，如果在上述讨论中考虑没有任何语句 $\neg\beta$ 的极限情景，那么就有必要利用 $\bot$。为了看出 $\{Rc_1k_{c_1w},Rc_2k_{c_2w}\}$ 是在 $\mathbf{G}_n^1$ 的一个膨胀中可满足的，我们假定 $\mathbf{G}_n^1\models\forall x_1(Rc_1x_1\to\cdots\to\forall x_s(Rc_sx_s\to\bot)\cdots)$ 等。这是实质需要定义 15.3 中的 $\bot$ 的地方。事实上，我们需要的就是 L_{n+1} 至少有一个满足 $\mathbf{F}_{n+1}\models\neg\beta$ 的受限正语句 β。$\bot$ 是这样一个语句，而且在某些情形下（例如，当 $\mathbf{F}_{n+1}=\langle\{0\},\{\langle0,0\rangle\}\rangle$ 时）也许还是唯一的一个。

另外，一个标准的模型论论证将确定 $\mathbf{\Gamma}$ 有一个模型 $\mathbf{G}_{n+1}$ 满足

（i）$\mathbf{G}_{n+1}$ 是一个 L_{n+1}-结构，

（ii）$\mathbf{G}_n^1\prec_{L_n^1}\mathbf{G}_{n+1}$，

以及

（iii）$\mathbf{G}_{n+1}-RP(L_{n+1})-\mathbf{F}_{n+1}$。

这可以图示如下：

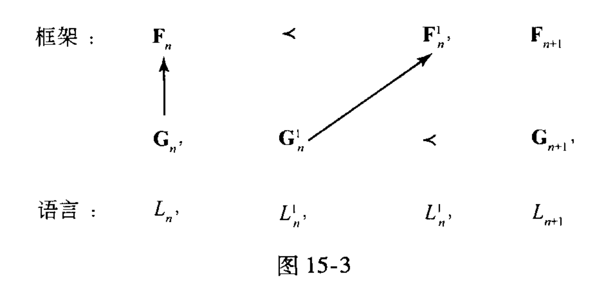


图 15-3

由这个煞费苦心的说明，就可清楚如何构造出所承诺的初等链 $\mathbf{F}_1$，$\mathbf{F}_2$，…和 $\mathbf{G}_1$，$\mathbf{G}_2$，…。于是，塔尔斯基初等链基本定理的若干应用，与最初在 α 中所做的假设相结合，就得到所要求的结论 $\mathbf{F}_1^1 \models \alpha[\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_n]$。

首先，因为 $\mathbf{G}_1 \models [\mathbf{w}_1/x_1, \cdots, \mathbf{w}_n/x_n]\alpha$，所以这个 L_1-语句在初等链 $\mathbf{G}_1$，$\mathbf{G}_2$，…的极限 $\mathbf{G}$ 中成立。其次，考虑 $\mathbf{G}$ 的、含有 $\mathbf{w}_1^{\mathbf{G}}$，…，$\mathbf{w}_n^{\mathbf{G}}$ 的最小生成子框架 $TC(\mathbf{G}, \mathbf{w}_1^{\mathbf{G}}, \cdots, \mathbf{w}_n^{\mathbf{G}})$。据上述构造过程可知，这个子框架恰好是 $\mathbf{G}$ 的那个以 $\{c^{\mathbf{G}} \mid c$ 是$\cup_n L_n$ 中的个体常项$\}$ 为个体域的子结构。由 α 对生成子框架的不变性，由此可以得到 $TC(\mathbf{G}, \mathbf{w}_1^{\mathbf{G}}, \cdots, \mathbf{w}_n^{\mathbf{G}}) \models [\mathbf{w}_1/x_1, \cdots, \mathbf{w}_n/x_n]\alpha$。现在，通过设 $f(c^{\mathbf{G}}) =_{def} c^{\mathbf{F}}$ 而定义一个从 $TC(\mathbf{G}, \mathbf{w}_1^{\mathbf{G}}, \cdots, \mathbf{w}_n^{\mathbf{G}})$ 到链 $\mathbf{F}_1$，$\mathbf{F}_2$，…的极限 $\mathbf{F}$ 的映射 f。我们断定 f 是从 $TC(\mathbf{G}, \mathbf{w}_1^{\mathbf{G}}, \cdots, \mathbf{w}_n^{\mathbf{G}})$ 到 $TC(\mathbf{F}, \mathbf{w}_1^{\mathbf{F}}, \cdots, \mathbf{w}_n^{\mathbf{F}})$ 上的一个 p-态射。

由下述事实可知，f 是良定义的：如果 $c_1^{\mathbf{G}} = c_2^{\mathbf{G}}$，则对适当大的 $n \in IN$ 有 $c_1 \in L_n$ 和 $c_2 \in L_n$。此外，还有 $\mathbf{G}_n \models c_1 = c_2$。因此，由于有 $\mathbf{G}_n - RP(L_n) - \mathbf{F}_n$，故而有 $\mathbf{F}_n \models c_1 = c_2$，从而有 $\mathbf{F} \models c_1 = c_2$。

f 为到上的映射这一结论可从这样的观察结果得出：$TC(\mathbf{F}, \mathbf{w}_1^{\mathbf{F}}, \cdots, \mathbf{w}_n^{\mathbf{F}})$ 的个体域等于 $\{c^F \mid c$ 是$\cup_n L_n$ 中的个体常项$\}$。

f 为同态的这一结论同上可得。如果 $\mathbf{G} \models Rc_1c_2$，则对适当大的 $n \in IN$ 有 $\mathbf{G}_n \models Rc_1c_2$，因而有 $\mathbf{F}_n \models Rc_1c_2$（并且 $\mathbf{F} \models Rc_1c_2$），因为 Rc_1c_2 是受限正的（正如 $c_1 = c_2$ 那样）。

如果 $\mathbf{F} \models Rc_1x[v]$，则对$\cup_n L_n$ 中的某个个体常项 c 有 $v = c_2^{\mathbf{F}}$（回顾一下语言 L_n 的构造：某个 k_{c_1v}就合用），从而（由 $\mathbf{G} \models Rc_1k_{c_1v}$可知）$k_{c_1v}^{\mathbf{G}}$ 是所要求的、$c_1^{\mathbf{G}}$ 的 R-后继，由 f 映到 v 上。这证实了 f 为 p-态射。

最后，由于 α 对 p-态射像保持，故而 $TC(\mathbf{F}, \mathbf{w}_1^{\mathbf{F}}, \cdots, \mathbf{w}_n^{\mathbf{F}}) \models [\mathbf{w}_1/x_1, \cdots, \mathbf{w}_n/x_n]\alpha$，并且（再次利用 α 对生成子框架不变的）$\mathbf{F} \models [\mathbf{w}_1/x_1, \cdots, \mathbf{w}_n/x_n]\alpha$。据塔尔斯基的定理可得 $\mathbf{F}_1 \models [\mathbf{w}_1/x_1, \cdots, \mathbf{w}_n/x_n]\alpha$，所以，最后有 $\mathbf{F}_n^1 \models \alpha[\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_n]$。 ■

推论 15.5 $P1$ 中各个公式逻辑等值于一个带有同样自由变项的受限正 L_0-公式。

证明：$P1$ 中任意一个公式对生成子框架不变，而且对 p-态射像保持，因为定义它的模态公式就是如此（参看定义 2.2 和推论 2.18）。 ■

下面一系列的概念和结果都跟$\overline{P}1$ 有关。

定义 15.6 一个 L_0-语句 α 对生成子框架保持，是指对于所有的满足 $\mathbf{F}_1 \underrightarrow{\subseteq} \mathbf{F}_2$ 的框架 $\mathbf{F}_1$ 和 $\mathbf{F}_2$ 都有，若 $\mathbf{F}_2 \models \alpha$，则 $\mathbf{F}_1 \models \alpha$。

定义 15.7 对任意一个包含 L_0 的一阶语言 L，特称受限的 L-公式就是 L 中的从原子公式及其否定利用 ∧、∨、∀ 和受限特称量词 $\exists yRty \wedge$）构造起来的公式，这里 t 是个体常项或不同于 y 的变项。

定理 15.8[21] 一个 L_0-语句对生成子框架保持，当且仅当它等值于一个特称受限 L_0-语句。

证明：这个证明的实质想法类似于定理 15.4 证明中的那些想法。因此，现在的阐述将是较为概略的：只着重阐述一些新的考虑。

首先，如果 α 是一个所带自由变项为 x_1，…，x_n 的特称受限 L_0-公式，那么对所有满足 $\mathbf{F}_1 \underrightarrow{\subseteq} \mathbf{F}_2$ 的框架 $\mathbf{F}_1(=\langle W_1, R_1\rangle)$ 和 $\mathbf{F}_2$ 以及所有的 $\mathbf{w}_1$，…，$\mathbf{w}_n \in W_1$ 都有：$\mathbf{F}_2 \models \alpha[\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_n]$，则 $\mathbf{F}_1 \models \alpha[\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_n]$（利用限制于 α 的结构的归纳法就可以）。于是，显然，本定理的一半已经得到证明。

现在，考虑任意一个对生成子框架保持的 L_0-语句 α。令 $ER(\alpha)$ 为 $\{\beta \mid \beta$ 是满足 $\alpha \models \beta$ 的特称受限 L_0-语句$\}$。为了建立本定理的另一半，只需证明 $ER(\alpha) \models \alpha$ 就可。

从满足 $\mathbf{F}_0 \models ER(\alpha)$ 的 $\mathbf{F}_0$ 开始（要求证明的就是 $\mathbf{F}_0 \models \alpha$），构造出两个初等链 $\mathbf{F}_0$，$\mathbf{F}_1$，$\mathbf{F}_2$，…和 $\mathbf{G}_0$，$\mathbf{G}_1$，$\mathbf{G}_2$，…。仅有的突出点是构造原则和最终的推理。

首先，$\{\alpha\} \cup \{\neg \beta \mid \beta$ 是满足 $\mathbf{F}_0 \models \neg \beta$ 的特称受限 L_0-语句$\}$ 的各个有穷子集都有模型，正如（此刻）用一个熟悉的论证可证明的那样。令 $\mathbf{G}_0$ 是整个集的一个模型。这提供了构造初等链的出发点：见下面的图示，这里，（i）$\mathbf{F}_0$ 和 $\mathbf{G}_0$ 都是 L_0-结构，并且（ii）$\mathbf{G}_0 - ER(\alpha) - \mathbf{F}_0$，即在 $\mathbf{G}_0$ 中为真的各个特称受限 L_0-语句也都在 $\mathbf{F}_0$ 中为真。

框架：$\mathbf{F}_0$

$\uparrow$

$\mathbf{G}_0$

语言：$\mathbf{L}_0$

图 15-4

其次，令 $\mathbf{F}_n$，$\mathbf{G}_n$ 和 L_n 已经构造出来并使得 $\mathbf{F}_n$ 和 $\mathbf{G}_n$ 是满足 $\mathbf{G}_n - ER(L_n) - \mathbf{F}_n$ 的 L_n-结构。对 L_n 的各个个体常项 c 和 $\mathbf{G}_n$ 个体域中满足 $\mathbf{G}_n \models Rcx[w]$ 各个 w，附

加一个新的个体常项 **w** 到 L_n 中，最终得到一个语言 L_n^1。然后通过将各个 **w** 解释 w 使 $\mathbf{G}_n$ 膨胀成一个 L-结构 $\mathbf{G}_n^1$。

$\Delta = \{\beta \mid \beta$ 是满足 $\mathbf{G}_n^1 \models \beta$ 的特称受限 L_n^1-语句$\}$ 的各个有穷子集都有一个为 $\mathbf{F}_n$ 的膨胀的模型。为了明白这一点，令 $\beta_1, \cdots, \beta_k \in \Delta$ 含有来自 $L_n^1 - L_n$ 的常项（总计）有 $\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_s$。那么，对适当的 L_n-常项 $c_1, \cdots, c_s$ 和不在 $\beta_1, \cdots, \beta_k$ 中出现的个体变项 $x_1, \cdots, x_s$，$\exists x_1(Rc_1x_1 \wedge \cdots \wedge \exists x_s(Rc_sx_s \wedge [x_1/\mathbf{w}_1, \cdots, x_s/\mathbf{w}_s](\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k))\cdots)$ 在 $\mathbf{G}_n$ 中成立，因而这个特称受限 L_n-语句也在 $\mathbf{F}_n^1$ 中成立，如此等等。由此可知，Δ 有一个为 L_n^1-结构的模型 $\mathbf{F}_n^1$，$\mathbf{F}_n^1$ 是 $\mathbf{F}_n$ 的一个 L_n-初等扩充，并且满足 $\mathbf{G}_n^1 - ER(L_n^1) - \mathbf{F}_n^1$。此情景可图示如下：

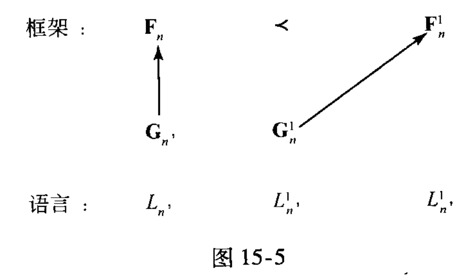


图 15-5

现在，转向下面的那个初等链。对 $\mathbf{F}_n^1$ 个体域中的各个世界 w，附加一个新的个体常项 **w** 到 L_n^1 中，最终得到一个语言 L_{n+1}。将 $\mathbf{F}_n^1$ 膨胀成一个 L_{n+1}-结构 $\mathbf{F}_{n+1}$。那么，$\Gamma = \{\neg \beta \mid \beta$ 是满足 $\mathbf{F}_{n+1} \models \neg \beta$ 的特称受限 L_{n+1}-语句$\} \cup \{Rc\mathbf{w} \mid c$ 是 L_n^1 中常项，**w** 是 $L_{n+1} - L_n^1$ 中常项，使得 $\mathbf{F}_{n+1} \models Rc\mathbf{w}\}$ 有一个为 $\mathbf{G}_n^1$ 的膨胀的模型。

对所描述的 $\neg \beta_1, \cdots, \neg \beta_k$ 和 $Rc_1\mathbf{w}_1, \cdots, Rc_s\mathbf{w}_s$，论证如下继续。令 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_t$ 是来自 $L_{n+1} - L_n^1$ 的常项，在 $\neg \beta_1, \cdots, \neg \beta_k$ 中出现，但不在 $\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_s$ 之中。于是，假定 $\neg \beta_1 \wedge \cdots \wedge \neg \beta_k \wedge Rc_1\mathbf{w}_1 \wedge \cdots \wedge Rc_s\mathbf{w}_s$ 不在 $\mathbf{G}_n^1$ 的任意一个膨胀中可满足。那么，对不在这一公式中出现的变项 $x_1, \cdots, x_s$ 和 $y_1, \cdots, y_t$，

$$\mathbf{G}_n^1 \models \forall y_1 \cdots \forall y_t \forall x_1 \cdots \forall x_s([x_1/\mathbf{w}_1, \cdots, x_s/\mathbf{w}_s, y_1/\mathbf{v}_1, \cdots, y_t/\mathbf{v}_t](\beta_1 \vee \cdots \vee \beta_k \vee \neg Rc_1\mathbf{w}_1 \vee \cdots \vee \neg Rc_s\mathbf{w}_s))$$

但是，由于这是一个特称受限的 L_n^1-语句，故而它也必须在 $\mathbf{F}_n^1$ 中成立，这矛盾于这些公式上的所设。由此可知，Γ 有一个为 L_{n+1}-结构的模型 $\mathbf{G}_{n+1}$，$\mathbf{G}_{n+1}$ 是 $\mathbf{G}_n^1$ 的一个 L_n^1-初等扩充，并且满足 $\mathbf{G}_{n+1} - ER(L_{n+1}) - \mathbf{F}_{n+1}$。用图像来说，这相当于下面的图示：

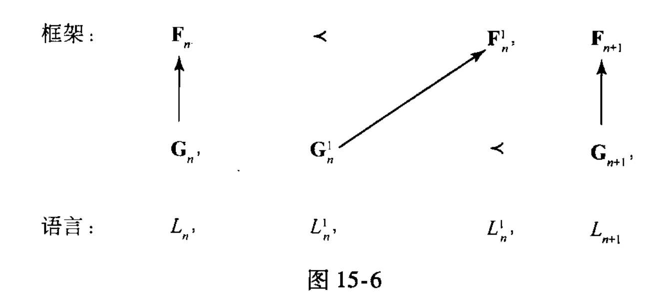


图 15-6

余下要做的就是最终的推理。由于 $\mathbf{G}_0 \models \alpha$，故而 α 在链 $\mathbf{G}_0$，$\mathbf{G}_1$，$\mathbf{G}_2$，…的极限 $\mathbf{G}$ 中成立。$\mathbf{G}$ 的那个以 $\{c^{\mathbf{G}} \mid c$ 是 $\cup_n L_n$ 中的常项$\}$ 为个体域的子结构 $\mathbf{G}^*$ 是 $\mathbf{G}$ 的一个生成子框架，据这些常项在结构 $\mathbf{F}_n^1$ 的构造过程中的选取方式而得。那么，α 在 $\mathbf{G}^*$ 中成立，因为它对生成子框架保持。

现在定义一个从 $\mathbf{G}^*$ 到链 $\mathbf{F}_0$，$\mathbf{F}_1$，$\mathbf{F}_2$，…的极限 $\mathbf{F}$ 的映射 f：设 $f(c^{\mathbf{G}}) =_{def} c^{\mathbf{F}}$。容易验证 f 是 $\mathbf{G}^*$ 和 $\mathbf{F}$ 之间的一个同构［利用 $\cup_n L_n$ 的每一个在 $\mathbf{G}$ 中为真的每一个原子公式（或其否定）也一定在 $\mathbf{F}$ 中为真（据构造过程而得）的事实，以及 $\mathbf{F}$ 中各个对象在 $\cup_n L_n$ 中有名字（也据构造过程而得）的事实］。因此，$\mathbf{F} \models \alpha$，从而有 $\mathbf{F}_0 \models \alpha$。 ■

定义 15.9 一个 L_0-语句 α 是对 *p*-态射保持的，是指对于任意的框架 $\mathbf{F}_1$ 及其 *p*-态射像 $\mathbf{F}_2$，若 $\mathbf{F}_1 \models \alpha$，则 $\mathbf{F}_2 \models \alpha$。

定义 15.10 对任意一个包含 L_0 的一阶语言 L，允许全称限制的正 L-公式（稍有点误导地，可简称为全称受限正 L-公式）就是 L 的从原子公式和 $\bot$ 利用 $\wedge$、$\vee$、$\exists$、$\forall$ 和受限全称量词 $\forall y(Rty \rightarrow$ 构造起来的公式，这里 t 是不同于 y 的个体常项或变项。

下述结果可以跟林登的同态定理相比较[17]。

定理 15.11 一个 L_0-语句对 *p*-态射保持，当且仅当它等值于一个全称受限正 L_0-语句。

证明： 这论证类似于前一论证。仅有的差别如下。

（i）给定 L_n-结构 $\mathbf{F}_n$，$\mathbf{G}_n$ 使得在 $\mathbf{G}_n$ 中为真的各个全称受限正 L_n-语句也都在 $\mathbf{F}_n$ 中为真。可以为 $\mathbf{G}_n$ 个体域中的各个 w 附加一个常项 $\mathbf{w}$，最终得到一个语言 L_n^1（由于非受限量词的出现，故而没有必要注意那些对某个 L_n-常项 c 使 $\mathbf{G}_n \models Rcx[w]$ 成立的 w）。很容易证得，各个由在膨胀结构 $\mathbf{G}_n^1$ 中为真的 L_n^1-语句组成的有穷集，在 $\mathbf{F}_n$ 的某个膨胀中得到满足，等等。

（ii）L_n-结构 $\mathbf{F}_n$，$\mathbf{G}_n$ 如同在（i）中那样给出，同时 $\mathbf{F}_n^1$ 是 $\mathbf{F}_n$ 的一个 L_n-初等扩充，使得在 $\mathbf{G}_n^1$ 中为真的各个全称受限正 L_n^1-语句也都在 $\mathbf{F}_n^1$ 中为真。现在

我们必须附加两种新的个体常项。首先，对各个 L_n^1-常项 c 和 $\mathbf{F}_n^1$ 个体域中满足 $\mathbf{F}_n^1 \models Rcx[w]$ 的各个 w，附加一个新的常项 k_{cw}（这些常项用来保证所要定义的、从链极限 $\mathbf{G}$ 到链极限 $\mathbf{F}$ 的映射满足 p-态射定义中的“反向”条款）。此外，对 $\mathbf{F}_n^1$ 个体域中的各个 w，附加一个新的常项 $\mathbf{w}$（以便保证同一个映射成为到上的）。这样产生一个语言 L_{n+1}。由在膨胀结构 $\mathbf{F}_{n+1}$ 中为真的全称受限正 L_{n+1}-语句的否定组成的各个有穷集，并上由形如 Rck_{cw}（对 $L_{n+1}-L_n^1$ 中的 k_{cw}）的 L_{n+1}-语句组成的一个有穷集，有一个为 $\mathbf{G}_n^1$ 的膨胀的模型。这个结论是由归谬法证明的，利用在构造全称受限正语句时受限和不受限的量词二者都允许被使用的事实。

（iii）链极限 $\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{F}$ 是作为 $\cup_n L_n$-结构而给定的。因为 $\mathbf{G}_0 \models \alpha$，所以 $\mathbf{G} \models \alpha$。像上述证明中那样的、从 $\mathbf{G}$ 到 $\mathbf{F}$ 的映射 f 被证明是一个到上的 p－态射（检查构造过程可得）。那么显然有 $\mathbf{F} \models \alpha$，从而有 $\mathbf{F}_0 \models \alpha$。 ■

对不相交并保持的情形已经证明是较难处理的。此时必须同时构造多个初等链系统。此外，句法上的表述也不那么精致。注意，例如，$\forall x \exists y Rxy$ 是对不相交并保持的（正如 $\forall x \exists y Ryx$ 那样！），而 $\forall x \forall y Rxy$ 则不是。事实上，我们只不过有下述猜测而已：

一个 L_0-语句对不相交并保持，当且仅当，它等值于一个形如 $\forall x\alpha$ 的语句，这里 $\alpha=\alpha(x)$ 是从原子公式及其否定利用 $\wedge$、$\vee$、$\exists$ 和形如 $\forall y(Rty\rightarrow$ 或者 $\forall y$（$Ryt\rightarrow$ 的受限全称量词构造起来的一个公式；这里 t 是一个个体常项或者一个不同于 y 的个体变项。

代之的是处理模态公式的下述性质（参看推论 2.15）。

定义 15.12　一个 L_0-语句为对不相交并不变，是指对于所有的框架集 $\{\mathbf{F}_i \mid i\in I\}$，$\sum\{\mathbf{F}_i \mid i\in I\} \models \alpha$，当且仅当，对于所有的 $i\in I$ 都有 $\mathbf{F}_i \models \alpha$。

定义 15.13　对任意一个包含 L_0 的一阶语言 L，双向受限的 L_0-公式就是 L 中的所有这样的公式：量词在其中的所有出现都依照 $\forall y(Rty\rightarrow$、$\forall y(Ryt\rightarrow$、$\exists y(Rty\wedge$ 和 $\exists y$（$Ryt\wedge$ 的形式而受限，这里 t 是一个个体常项或者一个不同于 y 的个体变项。

定理 15.14　一个 L_0-语句对不相交并不变，当且仅当，它等值于一个形如 $\forall x\alpha$ 的 L_0-语句，这里 $\alpha=\alpha(x)$ 是一个双向受限的 L_0-公式。

证明：令 $\{\mathbf{F}_i \mid i\in I\}$ 是任意一个框架集，并令对某个 $j\in I$ 有 $w_1, \cdots, w_n \in W_j$。对于各个双向受限的 L_0-公式 $\alpha=\alpha(x_1, \cdots, x_n)$，$\sum\{\mathbf{F}_i \mid i\in I\} \models \alpha[\langle j, w_1\rangle, \cdots, \langle j, w_n\rangle]$，当且仅当，$\mathbf{F}_i \models \alpha[w_1, \cdots, w_n]$（施归纳于 α 的复杂度可得）。断定上述 $\forall x\alpha(x)$ 为对不相交并不变的断言由此作为一个直接的推论而得。

现在令 α 是任意一个对不相交并不变的 L_0-语句。定义 $2R(\alpha)$ 为 $\{\forall x\beta \mid \beta$

$=\beta(x)$是满足 $\alpha \models \forall x\beta$ 的双向受限的 L_0-公式}。将要证明的是 $2R(\alpha) \models \alpha$。然后，据紧致性可知，对于 $2R(\alpha)$ 中的有穷多个语句 $\forall x_1\beta_1$，…，$\forall x_k\beta_k$，有 $\forall x_1\beta_1$，…，$\forall x_k\beta_k \models \alpha$。适当地对约束变项进行改名就产生 $2R(\alpha)$ 中的公式 $\forall x\beta_1'$，…，$\forall x\beta_k'$，它们也蕴涵 α。由此可知，α 逻辑等值于 $\forall x\beta_1' \wedge \cdots \wedge \forall x\beta_k'$，即等值于 $\forall x(\beta_1' \wedge \cdots \wedge \beta_k')$，这就是所要求的那种语句。

作为一个出发点，令 $\mathbf{F}_0^1 \models 2R(\alpha)$。那么 $\mathbf{F}_0^1$（而且的确是任意一个框架）可以被认为是（同构于）它的成分的一个不相交并。按此说法，$\mathbf{F}_0^1$ 的极小子框架是指对 R-前驱和 R-后继封闭的那个极小的子框架。事实上，在任意一个框架 $\mathbf{F}$（$=\langle W, R\rangle$）中，各个 $w \in W$ 生成一个成分 $\overline{T}\,\overline{C}$（$\mathbf{F}, w$），它是 $\mathbf{F}$ 的一个以 W_w 为个体域的子框架，W_w 的归纳定义如下。$\overline{S}_0(w) = \{w\}$，$\overline{S}_{n+1} = \overline{S}_n(w) \cup \{v \in W \mid$ 对某个 $u \in \overline{S}_n(w)$ 有 Ruv 或 $Rvu\}$（参看定义 2.7）。$W_w =_{def} \bigcup_n \overline{S}_n(w)$。注意，$\mathbf{F}$ 的各个成分是 $\mathbf{F}$ 的一个生成子框架，但逆之不成。另外要注意，如果 $v \in W_w$，那么 $\overline{T}\,\overline{C}$（$\mathbf{F}, v$）$= \overline{T}\,\overline{C}$（$\mathbf{F}, w$）。

理解这一点以后，将 $\mathbf{F}_0^1$ 按某种方式写成它的成分的一个不相交并。比方说，$\mathbf{F}_0^1 = \sum\{\mathbf{F}_{0w}^1 \mid w \in I\}$，这里 I 被包含于 $\mathbf{F}_0^1$ 的个体域，并且 $\mathbf{F}_{0w}^1 = \overline{T}\,\overline{C}$（$\mathbf{F}_0^1, w$）。于是，考虑任意一个 $\mathbf{F}_{0w}^1$。附加一个常项 $\mathbf{w}$ 到 L_0 中得到 L_w，并通过使 $\mathbf{w}$ 解释为 w 而将 $\mathbf{F}_{0w}^1$膨胀成一个 L_w-结构 $\mathbf{F}_{0w}$。对于所有的 $w \in I$ 都贯彻这一过程，最终产生 $\mathbf{F}_0^1$ 的一个膨胀 $\mathbf{F}_0$（$\mathbf{F}_0 = \sum\{\mathbf{F}_{0w} \mid w \in I\}$），它对各个 $w \in I$ 而言都是一个 L_w-结构。$\{\alpha\} \cup \{\beta \mid \beta$ 是满足 $\mathbf{F}_0 \models \beta$ 的一个双向受限的 L_w-语句$\}$ 的各个有穷子集都有模型（到现在，证明这个结论的论证应该是例行公事了），因而整个集有模型 $\mathbf{G}_w$（顺便说一下，注意并不存在任何一个双向受限的 L_0-语句，但常项 $\mathbf{w}$ 使得 L_w 中可能有这样的语句）。定义 $\mathbf{G}0$ 为由所有依此方式得到的 $\mathbf{G}_w(w \in I)$ 所组成的集。为统一起见，上述的"L_w"记成"$L_0(\mathbf{G}_w)$"。那么我们已经达到下述出发点。

（i）对各个 $\mathbf{G} \in \mathbf{G}0$，$\mathbf{G} - 2R(L_0(\mathbf{G})) - \mathbf{F}_0$；即 $L_0(\mathbf{G})$的各个在 $\mathbf{G}$ 中为真的双向受限语句也在 $\mathbf{F}_0$ 中为真；

（ii）对 $\mathbf{G}0$ 中不同的 $\mathbf{G}$，语言 $L_0(\mathbf{G})$有不相交的个体常项集；

并且

（iii）对 $\mathbf{G}0$ 中各个 $\mathbf{G}$，来自 $L_0(\mathbf{G})$的所有常项都各自在 $\mathbf{F}_0$ 的单独一个成分中得到解释，而且没有来自不同语言 $L_0(\mathbf{G}')$的常项的解释在该成分中出现。

一般的构造从刚才所描述的情景开始，但是是就任意的 n（而不是 1）而作的。

考虑任意一个 $\mathbf{G} \in \mathbf{G}n$。对各个 $L_n(\mathbf{G})$-常项 c 和 $\mathbf{G}$ 个体域中满足 $\mathbf{G} \models Rcx \vee$

$Rxc[w]$ 的各个个体 w，附加一个新的常项 $\mathbf{w}$ 到 $L_n(\mathbf{G})$ 中。这样最终产生一个语言 $L_n^1(\mathbf{G})$，并且可以通过使各个 $\mathbf{w}$ 解释为 w 而将 $\mathbf{G}$ 膨胀成一个 $L_n^1(\mathbf{G})$-结构 $\mathbf{G}^1$。这个过程相应于所有的 $\mathbf{G}\in\mathbf{G}n$ 进行下去；但记住所选取的新常项 $\mathbf{w}$ 使语言 $L_n^1(\mathbf{G})$保持不相交。$\cup_{\mathbf{G}\in\mathbf{G}n}$ $\{\beta \mid \beta$ 是在 $\mathbf{G}^1$ 中为真的双向受限 $L_n^1(\mathbf{G})$-语句$\}$ 的各个有穷子集都有为 $\mathbf{F}_n$ 的膨胀的模型［利用双向受限 $L_n(\mathbf{G})$ -语句对两种受限特称量化都封闭这一事实］。因此，整个集有一个模型 $\mathbf{F}_n^1$，使得对各个 $\mathbf{G}\in\mathbf{G}n$，

（i）$\mathbf{F}_n^1$ 是一个 $L_n^1(\mathbf{G})$-结构；

（ii）$\mathbf{F}_n$ 是 $\mathbf{F}_n^1$ 的一个 L_n（$\mathbf{G}$）-初等子结构；

（iii）$\mathbf{G}_n^1 - 2R(L_n^1\ (\mathbf{G}))\ -\ \mathbf{F}_n^1$；

并且

（iv）$L_n^1(\mathbf{G})$的所有常项都各自在 $\mathbf{F}_n^1$ 的单独一个成分中得到解释［即使来自 $L_n(\mathbf{G})$的那些常项有解释的那一个］。

对于另一方向，现在再考虑任意的 $\mathbf{G}\in\mathbf{G}n$。为 $\mathbf{F}_n^1$ 个体域中所有那些使得对 $L_n^1(\mathbf{G})$ 中某个常项 c 有 $\mathbf{F}_n^1 \models Rcx \vee Rxc[w]$ 的元素 w 取新常项 $\mathbf{w}$，最终得到 L_n^2（$\mathbf{G}$）。此外，对于 $\mathbf{F}_n^1$ 的各个迄今还未有常项的解释出现的成分，任取该成分中的一个元素 w 并附加一个新的个体常项 $\mathbf{w}$ 到 L_0 中，得到新语言 L_w。通过使各个新的 $\mathbf{w}$ 解释为相应的 w 将 $\mathbf{F}_n^1$ 膨胀成所有这些膨胀语言的一个结构 $\mathbf{F}_{n+1}$。相对于最后提到的 L_w，重复证明开始时的过程。然后，对各个 $L_n^2(\mathbf{G})$，考虑由所有在 $\mathbf{F}_{n+1}$中为真的双向受限 $L_n^2(\mathbf{G})$-语句所组成的集。如同上面一样，这个集的各个有穷子集都有为 $\mathbf{G}^1$ 的膨胀的模型［利用 $L_n^2(\mathbf{G})$-语句对否定封闭这一事实］。因此，整个集有模型 $\mathbf{G}^2$ 满足

（i）$\mathbf{G}^2$ 是一个 $L_n^2(\mathbf{G})$-结构；

（ii）$\mathbf{G}^1$ 是 $\mathbf{G}^2$ 的一个 $L_n^1(\mathbf{G})$-初等子结构，并且

（iii）$\mathbf{G}^2 - 2R(L_n^2\ (\mathbf{G}))\ -\ \mathbf{F}_{n+1}$。

$L_n^2(\mathbf{G})$ 改名为“$L_{n+1}(\mathbf{G})$”，并定义 $\mathbf{G}(n+1)$为由以上所得的所有结构 $\mathbf{G}^2(\mathbf{G}\in\mathbf{G}n)$和 $\mathbf{G}_w$ 组成的集。这样，在 n 标记的情形中发生的一切在 $n+1$ 所标记的情形中都在此出现。

这一构造产生一些初等链，各链从某个 $\mathbf{G}n$ 中的某个 $\mathbf{G}$ 开始；链的极限为 $C(\mathbf{G})$。由(所用公式集的)构造直接可知，$C(\mathbf{G})$ 是一个$\bigcup_n L_n(\mathbf{G})$-结构，$\bigcup_n L_n(\mathbf{G})$中所有常项的解释在其中形成一个成分 $C'(\mathbf{G})$。

此外，这些成分的不相交并 $\mathbf{G}^*$ 同构于链 $\mathbf{F}_0$，$\mathbf{F}_1$，$\mathbf{F}_2$，…的极限 $\mathbf{F}$（明显的同构是像在前面的证明中那样证明的)。于是，据构造可知，对各个 $\mathbf{G}n$ 中的各

个 $\mathbf{G}$ 有 $\mathbf{G}\models\alpha$，因而有 $C(\mathbf{G})\models\alpha$。据 α 对不相交并不变，有 $C'(G)\models\alpha$；从而同样的理由可得，$G^*\models\alpha$。由此可知 $\mathbf{F}\models\alpha$，从而有 $\mathbf{F}_0^1\models\alpha$。■

尽管还未能证明所期望的关于不相交并的保持结果，但已经找到一个组合的结果足以应付对 $\bar{P}1$ 的预定应用（参看定理 15.4）。

定理 15.15　一个 L_0-语句对生成子框架、不相交并和 p-态射保持，当且仅当，它等值于一个形如 $\forall x\beta$ 的 L_0-语句，这里，$\beta=\beta(x)$ 是一个受限正 L_0-公式。

证明：从右至左的方向直接由前面的观察而得。对于相反的方向，假设 L_0-语句 α 是对生成子框架、不相交并和 p-态射保持的。将要证明的是 $\overline{RP}$（α）$\models\alpha$；这里 $\overline{RP}$（α）$=\{\forall x\beta\mid\beta=\beta(x)$ 是一个满足 $\alpha\models\forall x\beta$ 的受限正 L_0-公式$\}$。如同在定理 15.14 的证明中一样，这将产生所要求的 α 的等值式。

考虑任意一个满足 $\mathbf{F}_0^1\models\overline{RP}(\alpha)$ 的 $\mathbf{F}_0^1$。为 $\mathbf{F}_0^1$ 个体域中各个 w 取常项 $\mathbf{w}$；这样产生语言 $L_w=L_0\cup\{\mathbf{w}\}$。通过将各个 $\mathbf{w}$ 解释为 w 使 $\mathbf{F}_0^1$ 膨胀成一个 $\bigcup_w L_w$-结构 $\mathbf{F}_0$。于是，对任意 $\mathbf{w}$，$\Gamma_w=\{\alpha\}\cup\{\neg\beta\mid\beta$ 是一个满足 $\mathbf{F}_0\models\neg\beta$ 的受限正 L_w-语句$\}$ 的各个有穷子集都有模型。否则的话，例如，$\{\alpha,\neg\beta_1,\cdots,\neg\beta_k\}$ 没有模型。换句话说，$\alpha\models\beta_1\vee\cdots\vee\beta_k$，因而有 $\alpha\models\forall x[x/\mathbf{w}](\beta_1\vee\cdots\vee\beta_k)$。但是，另一方面，$\mathbf{F}_0^1\models\forall x[x/\mathbf{w}](\beta_1\vee\cdots\vee\beta_k)$[这个语句是在 $\overline{RP}$（α）中的]；矛盾于 $\mathbf{F}_0^1\models[x/\mathbf{w}](\neg\beta_1\wedge\cdots\wedge\neg\beta_k)[w]$ 的事实。由此可知，Γ_w 有一个模型 $\mathbf{G}_w$。定义 $L_0\{\mathbf{G}_w\}$ 为 L_w，并定义 $\mathbf{G0}$ 为由所有以此方式得到的 $\mathbf{G}_w$ 所组成的集，这样产生下述出发点。

对各个 $\mathbf{G}\in\mathbf{G0}$，

(i) $\mathbf{F}_0$ 是一个 $L_0\{\mathbf{G}\}$-结构；

(ii) $\mathbf{G}-RP(L_0(\mathbf{G}))-\mathbf{F}_0$［这里的关系“$-RP(L)-$”是在定理 15.4 的证明中定义的］，并且

(iii) 对 $\mathbf{G0}$ 中各个不同的结构 $\mathbf{G}$，各个语言 $L_0(\mathbf{G})$ 有不相交的个体常项集。

再一次，将构造出一些初等链，依据下述原则而作。

令 $\mathbf{G}n$，$\mathbf{F}_n$ 以及对各个 $\mathbf{G}\in\mathbf{G}n$ 有一个 $L_n(\mathbf{G})$ 都已给定，并使得上述三个子句在“0”换成“n”后仍成立。考虑任意 $\mathbf{G}\in\mathbf{G}n$。对 $\mathbf{G}$ 的个体域中各个满足对某个 $L_n(\mathbf{G})$-常项 c 有 $\mathbf{G}\models Rcx[w]$ 的 w，附加一个新常项 $\mathbf{w}$ 到 $L_n(\mathbf{G})$ 中，最终得到语言 $L_n^1(\mathbf{G})$。然后通过使各个 $\mathbf{w}$ 解释为 w 就可将 $\mathbf{G}$ 膨胀成一个 $L_n^1(\mathbf{G})$-结构 $\mathbf{G}^1$。对各个 $\mathbf{G}\in\mathbf{G}n$ 重复这一过程，务必使不同语言 $L_n^1(\mathbf{G})$ 的个体常项集互不相交。

现在，令 $\Delta_n(\mathbf{G})$ 是由所有在 $\mathbf{G}^1$ 中为真的受限正 $L_n^1(\mathbf{G})$-语句组成的集（$\mathbf{G}\in\mathbf{G}_n$）。令 $\Delta_n=\bigcup_{\mathbf{G}\in\mathbf{G}_n}\Delta_n$（$\mathbf{G}$），那么 Δ_n 的每个有穷子集都有为 $\mathbf{F}_n$ 的膨胀的模型。

为此，考虑β_1^1，…，$\beta_{k_1}^1 \in \Delta_n(\mathbf{G})_1$，……，$\beta_1^m$，…，$\beta_{k_m}^m \in \Delta_n(\mathbf{G}_m)$。令$\beta_1^1$，…，$\beta_{k_1}^1$所含来自$L_n^1(\mathbf{G}_1) - L_n(\mathbf{G}_1)$的常项为$\mathbf{w}_1^1$，…，$\mathbf{w}_{s_1}^1$并令……并令$\beta_1^m$，…，$\beta_{k_1}^1$所含来自$L_n^1(\mathbf{G}_m) - L_n(\mathbf{G}_m)$的常项为$\mathbf{w}_1^m$，…，$\mathbf{w}_{s_m}^m$。注意，没有一个常项$\mathbf{w}_j^i$可以等于一个常项$w_l^k$（这里$i \neq k$）；因为语言$L_n^1(\mathbf{G}_1)$，…，$L_n^1(\mathbf{G}_m)$的个体常项集互不相交。所以，只需证得各个独立的集$\beta_1^i$，…，$\beta_{k_i}^i$有为$\mathbf{F}_n$的膨胀的模型就可。为了弄清这一点，令$c_1$，…，$c_{s_i}$是$L_n(\mathbf{G}_i)$中满足$\mathbf{G}_i \models Rc_jx[\mathbf{w}_j^i]$ $(1 \leq j \leq s_i)$的常项。由此对于适当的新变项x_1，…，x_{s_i}，[1]

$$\mathbf{G}_i \models \exists x_1(Rc_1x_1 \wedge \cdots \wedge \exists x_{s_i}(Rc_{s_i}x_{s_i} \wedge [x_1/\mathbf{w}_1^i, \cdots, x_{s_i}/\mathbf{w}_{s_i}^i](\beta_1^i \wedge \cdots \wedge \beta_{k_i}^i)。$$

这是一个受限正$L_n(\mathbf{G}_i)$-语句；据上述条款（ii）可知它在$\mathbf{F}_n$中成立。那么，最终Δ_n有一个模型$\mathbf{F}_n^1$，使得对各个$\mathbf{G} \in \mathbf{G}n$，

（i）$\mathbf{F}_n^1$是一个$L_n^1(\mathbf{G})$-结构；

（ii）$\mathbf{F}_n$是$\mathbf{F}_n^1$的一个$L_n(\mathbf{G})$-初等子结构，并且

（iii）$\mathbf{G}^1 - RP(L_n^1(\mathbf{G})) - \mathbf{F}_n$。

下面讨论另一方向。考虑任意语言$L_n^1(\mathbf{G})$（$\mathbf{G} \in \mathbf{G}n$）。对于$L_n^1(\mathbf{G})$中各个个体常项$c$和$\mathbf{F}_n^1$个体域中各个满足$\mathbf{F}_n^1 \models Rcx[w]$的$w$，附加一个新常项$k_{cw}$到$L_n^1(\mathbf{G})$中，最终得到$L_n^2(\mathbf{G})$［注意，不同的$L_n^2(\mathbf{G})$保留有不相交的个体常项集］。通过使各个常项$k_{cw}$解释为$w$将$\mathbf{F}_n^1$膨胀成一个（对各个$\mathbf{G}$而言的）$L_n^1(\mathbf{G})$-结构$\mathbf{F}_n^2$。$\Sigma_n(\mathbf{G}) = \{\neg\beta \mid \beta$是满足$\mathbf{F}_n^2 \models \neg\beta$的受限正$L_n^2(\mathbf{G})$-语句$\} \cup \{Rck_{cw} \mid k_{cw} \in L_n^2(\mathbf{G}) - L_n^1(\mathbf{G})\}$的各个有穷子集都有一个为$\mathbf{G}^1$的膨胀的模型［利用前面的论证以及受限正$L_n^1(\mathbf{G})$-语句在受限全称量化下封闭的事实］。因此，$\Sigma_n(\mathbf{G})$有一个模型$\mathbf{G}^2$，它是一个$L_n^2(\mathbf{G})$-结构，以$\mathbf{G}^1$为它的一个$L_n^1(\mathbf{G})$-初等子结构，而且还有$\mathbf{G}^2 - RP(L_n^2(\mathbf{G})) - \mathbf{F}_n^2$。

另外，为$\mathbf{F}_n^2$中所有那些迄今还未由任意一个$L_n^2(\mathbf{G})$中任意一个常项命名的元素w取一个新常项$\mathbf{w}$。通过使各个这样的常项$\mathbf{w}$解释为w将$\mathbf{F}_n^2$膨胀成一个结构$\mathbf{F}_{n+1}$。据迄今为止的做法，由最初的框架$\mathbf{F}_0^1$为$\mathbf{F}_{n+1}$的L_0-初等子结构立得$\mathbf{F}_{n+1} \models \overline{RP}(\alpha)$。但是，另一方面，构造G0所遵循的过程也可相对于$\mathbf{F}_{n+1}$和这些新常项$\mathbf{w}$重复进行，最终得到$\alpha$的一个模型$\mathbf{G}_w$，对应于它的语言为$L_{n+1}(\mathbf{G}_w)$（$= L_0 \cup \{\mathbf{w}\}$），并且满足$\mathbf{G}_w - RP(L_{n+1}(\mathbf{G}_w)) - \mathbf{F}_{n+1}$。

定义$\mathbf{G}(n+1)$为$\{\mathbf{G}^2 \mid \mathbf{G} \in \mathbf{G}n\} \cup \{\mathbf{G}_w \mid \mathbf{G}_w$是按前一段落中所说构造起来的$\}$并将$L_n^2(\mathbf{G})$改名为"$L_{n+1}(\mathbf{G}^2)$"，这样得到我们开始时的情景，不过以

[1] 原书中为x_s，有误——译者注。

$n+1$ 代替 n（那三个条款显然得到满足）。

所描述的构造产生出一组初等链，各链从某个 $\mathbf{G}n$ 中的一个结构 $\mathbf{G}$ 开始；同样还产生出一条单独的初等链 $\mathbf{F}_0$，$\mathbf{F}_1$，$\mathbf{F}_2$，…。由于对各个 $\mathbf{G}n$ 中的各个 $\mathbf{G}$ 有 $\mathbf{G}\models\alpha$，故而 α 将在各个从 $\mathbf{G}$ 开始的链的链极限 $C(\mathbf{G})$ 中为真。

正如在前面的证明中那样，可以定义一个明显的映射 $f_{\mathbf{G}}$ 如下。对 $\cup_n L_n(\mathbf{G})$ 中的任意一个常项 c，设 $f_{\mathbf{G}}(c^{C(\mathbf{G})}) =_{def} c^{\mathbf{F}}$。这里，$\mathbf{F}$ 是链 $\mathbf{F}_0$，$\mathbf{F}_1$，$\mathbf{F}_2$，…的极限。例行的验证表明，$f_{\mathbf{G}}$ 是从 $C(\mathbf{G})$ 的以 $\{c^{C(\mathbf{G})} \mid c\in\cup_n L_n(\mathbf{G})\}$ 为个体域的生成子框架到 $\mathbf{F}$ 的某个生成子框架上的一个 p-态射。所有这些 p-态射 $f_{\mathbf{G}}$ 的并 f 本身也是从所有极限 $C(\mathbf{G})$ 的不相交并的一个生成子框架到 $\mathbf{F}$ 上的一个 p-态射（它为到上的这一点可以在构造新语言的过程中 L_w 的连续产生得出）。

于是，α 在所有极限 $C(\mathbf{G})$ 中为真。因此，它在这些极限的不相交并中成立；因为它对这样的并保持。此外，因它对生成子框架保持，故而也在这个不相交并的（那个为 f 的定义域的）生成子框架中成立。应用它的（涉及 p-态射的）第三个保持性质就表明 α 在 $\mathbf{F}$ 中成立。最后，据初等链基本定理可得，$\mathbf{F}_0^1\models\alpha$。

■

推论 15.16 $\bar{P}1$ 中各个语句逻辑等值于一个形如 $\forall x\alpha$ 的 L_0-语句，这里 $\alpha=\alpha(x)$ 是一个受限正 L_0-公式。

在通向 $\bar{P}1$ 的一个完全句法刻画的路上要走的下一步似乎是为*超滤扩充*形成一个类似的保持结果（参看推论 14.8）。迄今还未找到这样的结果：下面叙述的只是一些部分答案。事实上应当牢牢记住，由所有对超滤扩充保持的 L_0-语句所组成的类并不一定是递归可枚举的：这一探索可能从一开始就是无益的。

首先，回顾一下来自第 2 章（2.24 ~ 2.27）的相关事实。特别要注意，$\mathbf{F}$ 通过映射 $w\mapsto\{X\subseteq W \mid w\in X\}$（$=w^*$）而同构嵌入于 $ue(\mathbf{F})$ 中。因此，就所有实际目的而言，可以把 $\mathbf{F}$ 看做 $ue(\mathbf{F})$ 的一个子框架。这意味着特称 L_0-语句对超滤扩充保持；但是这样一种不具体的结果当然难以令人激动。更多一点的信息是由下面的推论 15.19 提供的。

定义 15.17 令 u 是任意固定的一个个体变项。$r(u)$-*公式*就是任意一个从形如 Rux、Rxu、$u=x$、$x=u$ 的原子公式（这里 x 不同于 u）和没有 u 出现的原子公式应用布尔算子和下述两种受限特称量化得到的 L_0-公式：使公式 $\alpha(u)$ 量化为

$$\exists y(Ruy\wedge\alpha(y)) \text{ 或 } \exists y(Ryu\wedge\alpha(y));$$

这里 y 不在 $\alpha(u)$ 中出现。

例如，对于 $i\in\mathbb{N}$ 和任意一个不同于 u 的变项 x，公式 R^iux 就是一个 $r(u)$ 公式（参看第 9 章）。

引理 15.18　对于任意一个框架 $\mathbf{F}$（$=\langle W, R\rangle$），其中 $w_1, \cdots, w_k \in W$，任意一个 $r(u)$-公式 $\alpha=\alpha(u, x_1, \cdots, x_k)$ 以及任意一个 $\mathbf{F}$ 上的超滤 U，

$ue(\mathbf{F})\ \alpha \models [U, w_1^*, \cdots, w_k^*]$，当且仅当，$\{v\in W \mid \mathbf{F} \models \alpha[v, w_1, \cdots, w_k]\} \in U$。

证明：施归纳于 α 的构造上而得。

α 是 Rx_ix_j：$ue(\mathbf{F}) \models Rx_ix_j[U, w_1^*, \cdots, w_k^*]$，当且仅当，$R_{\mathbf{F}}w_i^*w_j^*$，当且仅当，$Rw_iw_j$，当且仅当，对任意的 $v\in W$ 有 $\mathbf{F} \models Rx_ix_j[v, w_1, \cdots, w_k]$，当且仅当，$\{v\in W \mid \mathbf{F} \models \alpha[v, w_1, \cdots, w_k]\} \in U$。

α 是 $x_i = x_j$：类上而作。

α 是 Rux_i：$ue(\mathbf{F}) \models Rux_i[U, w_1^*, \cdots, w_k^*]$，当且仅当，$R_{\mathbf{F}}Uw_i^*$，当且仅当，（利用一个容易的演算）$\{v\in W \mid Rvw_i\} \in U$，当且仅当，$\{v\in W \mid \mathbf{F} \models Rux_i[v, w_1, \cdots, w_k]\} \in U$。

α 是 Rx_iu：类上而作；利用 $R_{\mathbf{F}}w_iU$，当且仅当，$\{v\in W \mid Rw_iv\} \in U$ 这一事实。

α 是 $u=x_i$：$ue(\mathbf{F}) \models u = x_i[U, w_1^*, \cdots, w_k^*]$，当且仅当，$U = w_i^*$，当且仅当，$\{w_i\} \in U$，当且仅当，$\{v\in W \mid \mathbf{F} \models u=x_i[v, w_1, \cdots, w_k]\} \in U$。

α 是 $x_i = u$：类上而作。

α 是 $\neg\beta$ 或 $\beta\wedge\gamma$：这些情形由标准的论证而得，利用超滤的特征性质。

α 是 $\exists y(Ruy\wedge\beta(y))$：$ue(\mathbf{F}) \models \exists y(Ruy\wedge\beta(y))[U, w_1^*, \cdots, w_k^*]$，当且仅当，对 $W_{\mathbf{F}}$ 中某个满足 $R_{\mathbf{F}}UV$ 的超滤 V 有 $ue(\mathbf{F}) \models \beta[V, w_1^*, \cdots, w_k^*]$，当且仅当，（据归纳假设）对 $W_{\mathbf{F}}$ 中某个满足 $R_{\mathbf{F}}UV$ 的 V 有 $\{v\in W \mid \mathbf{F} \models \beta[v, w_1, \cdots, w_k]\} \in U$。

现在应用下述一般原则：

令 $\alpha=\alpha(y, y_1, \cdots, y_k)$ 是一个 L_0-公式。对于任意的 $w_1, \cdots, w_k \in W$ 和任意的 $U\in W_{\mathbf{F}}$，$\{v\in W \mid \exists z\in W\ (Rvz\ \&\ \mathbf{F} \models \alpha[z, w_1, \cdots, w_k])\} \in U$，当且仅当，对某个满足 $R_{\mathbf{F}}UV$ 的 $V\in W_{\mathbf{F}}$，$\{v\in W \mid \mathbf{F} \models \alpha[v, w_1, \cdots, w_k]\} \in U$。

建立这一原则的标准推演这里从略。我们只需对由 W 的子集组成的一个适当的滤子应用超滤扩充定理。

于是，当且仅当命题就可继续列举下去：当且仅当，$\{v\in W \mid \exists z\in W\ (Rvz\ \&\ \mathbf{F} \models \beta[z, w_1, \cdots, w_k])\} \in U$；即当且仅当，$\{v\in W \mid \mathbf{F} \models \exists y(Ruy\wedge\beta(y))[v, w_1, \cdots, w_k]\} \in U$。

α 是 $\exists y(Ryu\wedge\beta(y))$：类似地可以证明；不过现在用的是对偶的原则：$\{v\in W \mid \exists z\in W\ (Rzv\ \&\ \mathbf{F} \models \alpha[z, w_1, \cdots, w_k])\} \in U$，当且仅当，对某个满足 $R_{\mathbf{F}}VU$ 的 $V\in W_{\mathbf{F}}$，$\{v\in W \mid \mathbf{F} \models \alpha[v, w_1, \cdots, w_k]\} \in V$。■

推论 15.19 对于任意一个 $r(u)$ -公式 $\alpha=\alpha(u, x_1, \cdots, x_k)$ 以及对于任意一个框架 $\mathbf{F}$（$=\langle W, R\rangle$）和 $w, w_1, \cdots, w_k \in W$，$ue(\mathbf{F}) \models \alpha[w^*, w_1^*, \cdots, w_k^*]$，当且仅当，$\mathbf{F} \models \alpha[w, w_1, \cdots, w_k]$。

证明： 据引理 15.18，$ue(\mathbf{F}) \models \alpha[w^*, w_1^*, \cdots, w_k^*]$，当且仅当，$\{v \in W \mid \mathbf{F} \models \alpha[v, w_1, \cdots, w_k]\} \in w^*$，并且后者成立当且仅当 $w \in \{v \in W \mid \mathbf{F} \models \alpha[v, w_1, \cdots, w_k]\}$，当且仅当，$\mathbf{F} \models \alpha[w, w_1, \cdots, w_k]$。 ■

这推论蕴涵着，任意一个从对 $r(u)$-公式应用特称量化而得的 L_0-句子都对超滤扩充保持。这就推广了上述关于特称 L_0-语句的保持的观察。不过很可惜，它并没穷尽由所有对超滤扩充保持的语句所组成的类。例如，$\forall xRxx$ 和 $\forall x \forall yRxy$ 两者也都有这个性质（不过 $\forall x\neg Rxx$ 没有这个性质）。$\forall x\neg Rxx$ 并不保持，这一点可以从紧随推论 2.26 之后的例子中看出。因为 $\langle IN, <\rangle \models \forall x\neg Rxx$，但是 $ue(\langle IN, <\rangle) \models \forall x \exists y(Rxy \wedge Ryy)$。另一方面，如果 $\mathbf{F} \models \forall xRxx$，则 $ue(\mathbf{F}) \models \forall xRxx$。因为，令 $U \in W_{\mathbf{F}}$ 并令 X 是 U 中任意一个集合。$\{w \in W \mid \exists v \in XRwv\}$ 包含 X 因而是在 U 中的。换句话说，$R_{\mathbf{F}}UU$ 成立。

在这个方向得到更深的研究以前，$\bar{P}1$ 的句法结构依然是不透明的。

附录（时态逻辑）

本章引进的某些概念属于时态逻辑而不属于模态逻辑。所谓“时态逻辑”是指命题语言中加进了算子 G（“将来总是”）和 F（“将来会是”）以及 H（“过去总是”）和 P（“过去曾是”）。语义上，框架 $\mathbf{F}=\langle W, R\rangle$ 现在行使时间结构的职责，其中以 W 为所有时刻所组成的集合，并以 R 为次序关系“早于”。在真值定义中，G 和 F 分别像 L 和 M 那样处理；而 H 和 P 则成为利用 R 的逆关系而得的对偶概念（至于一个较充分的阐述，请参看［64］）。本书目前研究的模态理论可以毫不费事地推广到时态逻辑。只需作些小的修改就可。一个例子是，时态逻辑公式不一定对生成子框架保持。不过，它们对不相交并保持；而且实际上它们是对不相交并是不变的（参看定义 15.12）。于是，双向受限的 L_0-公式在定理 15.14 的陈述中出现绝非巧合。类似地，时态逻辑公式并不总是对 p-态射保持，但它们对 $\bar{p}$-态射［即在满足下述附加条件（参看定义 2.16）的 p 态射］保持：（iii）“对于所有的 $w \in W_1$ 和 $v \in W_2$，$R_2vf(w)$ 则有一个 $u \in W_1$ 使得 R_1uw，并且 $f(u)=v$”。显然，可以形成定理 15.11 的一个明显的变种并证明其成立。最后，超滤扩充在时态逻辑中可以依照原样接受。例如，注意特有的事实：在定义 15.17 中，量词 $\exists yRyu \wedge$ 所起作用跟量词 $\exists yRuy \wedge$ 一样。时态逻辑也许是使克里

普克语义对之有最自然的合理性的内涵逻辑系统，除了这一哲学上的功效以外，它还有技术上的功效，一些在限制较多的模态逻辑语言中很难找出实例的现象在时态逻辑中常常较易得到实例（例如，不完全性，参看［79］）。时态逻辑语义方面的种种理论（包括它们的对应理论）的一个充分阐述可以在本著者的《时间的逻辑》（*The Logic of Time*，Reidel，Dordrecht，1982，Synthese Library，vol. 156）一书中找到。

16 模态可定义的框架类

在第 14 章中我们曾问过哪些初等框架类是模态可定义的。本章将要论述的更为一般的问题是："一个框架类究竟什么时候是模态可定义的?"正如结果所示，这里得到的最精致的回答不是针对刚刚提到的这个具体的问题，而是对这样一个较特殊的问题：哪些框架类是用典范的模态公式集（参看定义 6.8）模态可定义的。

我们开始探讨上面最初提到的那个问题，答案当然并不显然，因为实际上我们是在问一个二阶逻辑的问题：什么时候一个框架类能用全称二阶句子（被认为相当简单的一类句子）加以定义？转向"最邻近的"一阶逻辑——一个两种类谓词逻辑——那可说是很自然的事，它在 L_0（其变项取值于"个体"）上扩充了取值于"个体集"的变项[20]。一般框架将是适合于这个语言的结构，第一个体域是 W 而第二个体域则是 $\mathbf{W}$。于是有希望在现在的情形中引用一阶可定义结构类的那个为人熟知的刻画（归于凯斯勒）。这实际上正是第 17 章和第 18 章将要遵循的路子。但是，对于模态公式这一特殊情形而言，还提供了一种更巧妙的探索。它在于该主题的代数化，代数化后可以应用柏克霍夫的那个同样为人熟知的代数簇的刻画[32]：

> 包含代数类 **K** 的最小的等式可定义代数类是 **HSP**(**K**)，这里
> **H**(X) 是由 X 中成员的同态像所组成的类，
> **S**(X) 是由 X 中成员的子代数所组成的类，
> **P**(X) 是由 X 中成员的直积所组成的类 。

为此探索作基础的对偶性已概述于第 4 章中。它在［30］中有充分详细的描述。

作为这一探索实际效用的第一个标志，将阐述（［30］，定理 12.11）一个关于一般框架类的模态可定义性的结果（参看定理 16.1）。请回顾第 4 章中所论述的对偶性。

定理 16.1（戈德布拉特） 一个一般框架类 **K** 是模态可定义的，当且仅当，它对生成子框架、不相交并、p-态射像和斯通表示封闭，而它的补类对斯通表示封闭。如果 **K** 的补类还对超积封闭，则 **K** 是用单独一个模态公式可定义的（逆之亦成）。

证明：如果 **K** 是模态可定义的，则据第 4 章中结果可知上述封闭条件成立。如果单独一个模态公式定义 **K**，那么依据推广到这些超积上的沃斯定理的一个例行论证也就确定 **K** 的补类对超积封闭。

反过来，令 **K** 满足第一个命题的封闭条件。将要证明的是，**K** 恰好由所有使 $Th_{mod}(\mathbf{K})$（即 $\{\varphi \mid \varphi$ 是在 **K** 的所有成员中都为真的模态公式$\}$）成立的一般框架组成。这个结论的一个方向是不足道的。至于另一方向，假定 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle \models \Sigma = Th_{mod}(\mathbf{K})$。要证明的就是 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle$ 实际上属于 **K**。

在代数方面，$\langle \mathbf{F}, W \rangle^{+} \models \Sigma^{+}$；这里 Σ^{+} 是由所有对应于 Σ 中模态公式 φ 的多项式等式 $\bar{\varphi} = 1$（参看第 4 章中"多项式副本"的定义）所组成的集。显然，Σ^{+} 是由在 $\mathbf{K}^{+} = \{\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle^{+} \mid \langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle \in \mathbf{K}\}$ 所有的代数中都为真的多项式等式所组成的集。事实上，如果不计一个不足道的差别，Σ^{+} 就是 $\mathbf{K}^{+}$ 的代数理论。因为，如果多项式等式 $t_1 = t_2$ 在 $\mathbf{K}^{+}$ 所有的代数中成立，则一个明显的对应模态公式 $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ 就属于 Σ。

那么很容易看出，对于任意一个代数类 X，包含 X 的最小的等式簇就是由所有使 X 的代数理论在其中成立的代数所组成的类。据柏克霍夫定理可知，这个簇也等于 $\mathbf{HSP}(X)$。应用这一结果到 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle^{+}$ 和 $\mathbf{K}^{+}$ 就可知，$\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle^{+}$ 一定属于 $\mathbf{HSP}(\mathbf{K}^{+})$。换句话说，**K** 中有一般框架 $\langle \mathbf{F}_i, \mathbf{W}_i \rangle^{+}$ $(i \in I)$ 使得 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle^{+}$ 为 $\Pi_{i \in I} \langle \mathbf{F}_i, \mathbf{W}_i \rangle^{+}$ 的某个子代数 **A** 的同态像。据引理 4.10 可知，$\Pi \langle \mathbf{F}_i, \mathbf{W}_i \rangle^{+}$ 同构于 $(\sum \{\langle \mathbf{F}_i, \mathbf{W}_i \rangle \mid i \in I\})^{+}$；这里，不相交并 $\langle \mathbf{F}_u, \mathbf{W}_u \rangle = \sum \{\langle \mathbf{F}_i, \mathbf{W}_i \rangle \mid i \in I\}$ 属于 **K**（因为 **K** 对不相交并封闭）。由此可知，**A** 同构于 $\langle \mathbf{F}_u, \mathbf{W}_u \rangle^{+}$ 的某个子代数 $\mathbf{A}'$，从而 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle^{+}$ 是 $\mathbf{A}'$ 的一个同态像（图 16-1）。

$$\langle \mathbf{F}_u, \mathbf{W}_u \rangle^{+} \quad \supseteq \quad \mathbf{A}' \longrightarrow \langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle^{+}$$

图 16-1

利用引理 4.9，这可以扩展成

$$\begin{array}{ccc} \langle \mathbf{F}_u, \mathbf{W}_u \rangle^{+} & \supseteq & \mathbf{A}' \longrightarrow \langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle^{+} \\ | & & | \\ SR(\langle \mathbf{F}_u, \mathbf{W}_u \rangle^{+}) & \longrightarrow & SR(\mathbf{A}') \end{array}$$

图 16-2

这里 $SR(\mathbf{A}')$ 是 $SR(\langle \mathbf{F}_u, \mathbf{W}_u \rangle^{+})$ 的一个 p-态射像。利用引理 4.8，图 16-2 可以补充完全成为

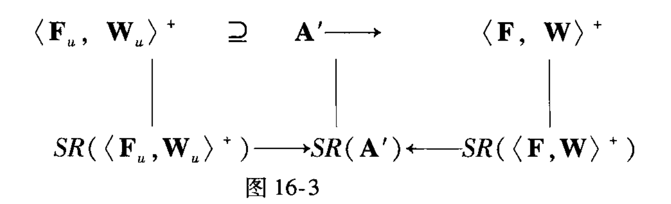


图 16-3

这里 $SR(\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle^+)$ 同构于 $SR(\mathbf{A}')$ 的一个生成子框架。于是，$SR(\langle \mathbf{F}_u, \mathbf{W}_u \rangle^+)$ 是在 $\mathbf{K}$ 中的（因为 $\mathbf{K}$ 是对斯通表示封闭的）；因此 $SR(\mathbf{A}')$ 在 $\mathbf{K}$ 中（因为 $\mathbf{K}$ 对 p-态射像封闭），从而 $SR(\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle^+) \in \mathbf{K}$［因为 $\mathbf{K}$ 对生成子框架和同构象（p-态射像的一个特殊情形）封闭］。最后，则 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle$ 一定属于 $\mathbf{K}$，因为 $\mathbf{K}'$ 的补类对斯通表示封闭。

余下要考虑的是本定理的第二个命题。它只需证明，如果 $\mathbf{K}$ 是模态可定义的，并且 $\mathbf{K}$ 的补类对超积封闭，那么单独一个模态公式就能定义 $\mathbf{K}$。类似于引理 14.1 证明中的考虑表明，只需证明包含 $\mathbf{K}^+$ 的最小等式簇（即由所有 Σ^+ 在其中成立的代数所组成的类；它真包含 $\mathbf{K}^+$，因为在它的成员之中有非集代数）是由一个有穷的多项式等式集所定义的。为此所要证明的就是，该簇的补对超积封闭（在那之后就可像在 14.1 的证明中那样应用凯斯勒定理）。于是，令 $\mathbf{A}_i$（$i \in I$）是使 Σ^+ 在其中不成立的模态代数，并令 U 是 I 上的一个超滤。要证明的就是 $\Pi_U \mathbf{A}_i \not\models \Sigma^+$。但这很容易从下述观察得：各个 $SR(\mathbf{A}_i)$ 属于 $\mathbf{K}$ 的补类，因而 $\Pi_U SR(\mathbf{A}_i)$ 也属于那个类，从而（再一次像在 14.1 的证明中那样）$\Pi_U \mathbf{A}_i \cong \Pi_U SR(\mathbf{A}_i)^+ \cong (\Pi_U SR(\mathbf{A}_i))^+$。■

在论文［31］中，戈德布拉特和托马森用这样的方法刻画模态可定义的框架类。由于他们得到的概念（和结果）都是典型的“为证明而给出的”（proof-generated），故而，故事最好颠倒过来讲。

令 $\mathbf{K}$ 是一个框架类。显然，若 $\mathbf{K}$ 确实是模态可定义的，则它将由 $Th_{mod}(\mathbf{K})$ 定义。然后考虑任意一个使得 $\mathbf{F} \models Th_{mod}(\mathbf{K})$ 成立的框架 $\mathbf{F}$。什么样的条件要求于 $\mathbf{K}$ 才能保证 $\mathbf{F} \in \mathbf{K}$ 呢？明显的办法就是像在前一证明中那样转到对应的代数上。设 $\Sigma = Th_{mod}(\mathbf{K})$，则 $\mathbf{F}^+$（$= \langle \mathbf{F}, P(W) \rangle^+$）$\models \Sigma^+$，并且如前一样有 $\mathbf{F}^+ \in \mathbf{HSP}(\mathbf{K}^+)$。从前面的论证还可得到，可以找到 $\mathbf{K}$ 中框架的一个不相交并 $\mathbf{F}_u$ 使得 $\mathbf{F}^+$ 是 $\mathbf{F}_u^+$ 的某个子代数 $\mathbf{A}'$ 的一个同态像。

第一个要求：$\mathbf{F}_u$ 属于 $\mathbf{K}$；即 $\mathbf{K}$ 对不相交并封闭。

那么作为 $SR(\mathbf{F}_u^+)$ 的一个 p-态射像［即 $ue(\mathbf{F}_u)$ 的一个 p-态射像］我们有 $SR(\mathbf{A}')$。但是这没有什么帮助，因为一个导致 $\mathbf{K}$ 对超滤扩充（并且当然对 p-态射像也）封闭的要求太强：并非所有的模态可定义类 $\mathbf{K}$ 都满足它。正如我们在第二

章已看到的那样，不过这一事实仍是某种需要注意的东西（参看定理 16.4）。

对于 $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{F}_u$ 我们仅仅知道 $\mathbf{F}^+$ 是 $\mathbf{F}_u^+$ 的某个子代数的一个同态像［或者用上述对偶性的话来说，$SR(\mathbf{F}^+)$ 同构于 $SR(\mathbf{A}')$ 的一个生成子框架］。为了填补 $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{F}_u$ 之间的空白，戈德布拉特和托马森引进了下述概念。

定义 16.2　框架 $\mathbf{F}_1$ 为 SA-基于框架 $\mathbf{F}_2$ 之上的，是指对某个使得 $\langle \mathbf{F}_2, \mathbf{W}\rangle$ 为一般框架的 $\mathbf{W}$ 而言，$\mathbf{F}_1$ 是 $SR(\langle \mathbf{F}_2, \mathbf{W}\rangle^+)$ 的基础框架的一个子框架，满足下述三个条件：对于所有的 $U, V \in W_1$，

（i）R_1UV 当且仅当对于所有的 $X \in \mathbf{W}$，如果 $l(X) \in U$，那么 $X \in V$；

（ii）对于所有的 $X \in \mathbf{W}$，如果 $l(X) \notin U$，那么对某个 $U' \in W_1$，有 R_1UU' 和 $X \notin U'$；

（iii）对于所有的 $Y \subseteq W_1$，存在一个 $X \in \mathbf{W}$ 使得 $Y = W_1 \cap \{Z \mid Z$ 是 $\langle \mathbf{F}_2, \mathbf{W}\rangle^+$ 上的一个包含 X 的超滤$\}$。

注意，就上述情景来说，$\mathbf{A}'$因其为 $\mathbf{F}_u^+$ 的一个子代数而对某个 $\mathbf{W}$ 而言等于 $\langle \mathbf{F}_u, \mathbf{W}\rangle^+$。而且，$\mathbf{F}$ 是同构嵌入于 $ue(\mathbf{F})$ 中的，它自身同构于 $SR(\langle \mathbf{F}_u, \mathbf{W}\rangle^+)$ 的一个生成子框架。一个直截了当的计算表明，$\mathbf{F}$ 同构于一个 SA-基于 $\mathbf{F}_u$ 的框架。实际上，戈德布拉特和托马森证明了下述一般性断言。

引理 16.3　对任意框架 $\mathbf{F}$ 和任意框架类 $\mathbf{K}$，$\mathbf{F}^+ \in HS(\mathbf{K}^+)$，当且仅当，$\mathbf{F}$ 同构于一个 SA-基于 $\mathbf{K}$ 中某个框架上的框架。

这个引理另一个明显的推论是

定理 16.4（戈德布拉特和托马森）　一个框架类 $\mathbf{K}$ 是模态可定义的，当且仅当，它对不相交并、SA-基于 $\mathbf{K}$ 中某个框架的框架以及同构象封闭。

考察以上论证的另一方式如下。回顾定义 6.11 中的典范集。这样的集在从使它们成立的描述性一般框架过渡到基础框架时是保持的。典范模态可定义性可以用不那么特设的概念来刻画：

定理 16.5　一个框架类 $\mathbf{K}$ 是通过一个典范的模态公式集可定义的，当且仅当，它对生成子框架、不相交并、p－态射像以及超滤扩充封闭，而它的补类也对超滤扩充封闭。

证明：如果 $\mathbf{K}$ 是典范可定义的，则它对超滤扩充封闭（其他闭包性质已由它为模态可定义的可得出）。因为，令典范集 Σ 定义 $\mathbf{K}$。考虑任意一个 $\mathbf{F} \in \mathbf{K}$；即 $F \models \Sigma$。据第4 章的结果可知，$SR(\mathbf{F}^+) = \langle ue(\mathbf{F}), \mathbf{W}\rangle \models \Sigma$。但这个一般框架是描述性的，从而有 $ue(\mathbf{F}) \models \Sigma$，因为 Σ 是典范的。

如果 $\mathbf{K}$ 满足所述的闭包性质，则上面的论证可以再一次使用。对于任意一个满足 $\mathbf{F} \models Th_{mod}(\mathbf{K})$ 的 $\mathbf{F}$ 而言，得到证明的是，$SR(\mathbf{F}^+)$ 同构于某个一般框架

$SR(\mathbf{F}_u^+)$（这里 $\mathbf{F}_u \in \mathbf{K}$）的某个 p 态射象的一个生成子框架。然后我们按图索骥：$\mathbf{F}_u \in \mathbf{K}$，因而 $ue(\mathbf{F}_u) \in \mathbf{K}$。于是对某个 $\mathbf{W}$ 有 $SR(\mathbf{F}_u^+) = \langle ue(\mathbf{F}_u), \mathbf{W}\rangle$；所以，对它的 p-态射象 $\langle \mathbf{F}', \mathbf{W}'\rangle$ 有 $\mathbf{F}' \in \mathbf{K}$。对 $\langle \mathbf{F}', \mathbf{W}'\rangle$ 的任意一个生成子框架 $\langle \mathbf{F}'', \mathbf{W}''\rangle$，有 $\mathbf{F}'' \in \mathbf{K}$，并且对它同构拷贝 $\langle \mathbf{F}''', \mathbf{W}'''\rangle$ 中的 $\mathbf{F}'''$ 也有同样的结论。特别是由此可得，因 $SR(\mathbf{F}^+) = \langle ue(\mathbf{F}), \mathbf{W}'''\rangle$ 是这样一个拷贝，故而 $ue(\mathbf{F}) \in \mathbf{K}$。最后，$\mathbf{F} \in \mathbf{K}$；因为 $\mathbf{K}$ 的补类对超滤扩充封闭。■

戈德布拉特和托马森从这个定理得出如下推论，事实上，它已经作为定理 14.7 给出。

推论 16.6 如果一个框架类 $\mathbf{K}$ 对（L_0-）初等等价封闭，那么 $\mathbf{K}$ 是模态可定义的，当且仅当，$\mathbf{K}$ 对生成子框架、不相交并以及 p-态射象封闭，而它的补类 ${}^c\mathbf{K}$ 对超滤扩充封闭。

推论 16.7（法因） 如果一个模态公式集 Σ 是完全的并且在初等等价下封闭的，则它是典范的。

证明： $FR(\Sigma)$ 对 p-态射象和初等等价封闭。因此据定理 8.9 可知，它对超滤扩充封闭。这样，定理 16.5 就可以用到：对某个典范的模态公式集 Δ 有 $FR(\Sigma) = FR(\Delta)$。由于 Σ 是完全的（参看定义 6.4），此外也由于对于所有的 $\delta \in \Delta$ 有 $\Sigma \models_f \delta$，故而对于所有的 $\delta \in \Delta$ 都有 $\Sigma \models_{gf} \delta$ [或者，等价地说，$\Delta \subseteq ML(\Sigma)$]。于是，令 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W}\rangle$ 是任意一个使 Σ 在其中成立的描述性一般框架。那么显然有 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W}\rangle \models \Delta$；从而有 $\mathbf{F} \models \Delta$，因为 Δ 是典范的。由此可知还有 $\mathbf{F} \in FR(\Sigma)$。■

在定理 16.5 的证明中已证明，任意一个典范的模态公式集对超滤扩充保持。其逆并不成立。$\overline{M}1$ 中的每一个模态公式都对超滤扩充保持，据定理 8.9 而得。但并非 $\overline{M}1$ 中的每一个模态公式都是典范的：它们中有一些甚至都不是完全的（参看第 6 章）。我们真正有的就是下述两个结果。

引理 16.8 Σ 是典范的，当且仅当，它在从一般框架过渡到其斯通表示的基础框架时是保持的。

证明： 若 Σ 是典范的，并且 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W}\rangle \models \Sigma$，则 $SR(\langle \mathbf{F}, \mathbf{W}\rangle^+) \models \Sigma$。此外，$SR(\langle \mathbf{F}, \mathbf{W}\rangle^+)$ 是描述性的，因而 Σ 在它的基础框架上成立。

如果 Σ 有所描述的保持性，那么，若 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W}\rangle \models \Sigma$，这里 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W}\rangle$ 是描述性的，则 Σ 在 $SR(\langle \mathbf{F}, \mathbf{W}\rangle^+)$ 的基础框架中成立；它同构于 $\mathbf{F}$ 自身。

引理 16.9 Σ 对超滤扩充保持，当且仅当，$C(\Sigma)$ 是典范的。

证明： 从左至右的方向由定理 16.5 得出。从右至左的方向由典范集对超滤扩充保持这一事实得出。

对于由单独一个模态公式可定义的框架类还没有形成任何结果。我们想要知道那个明显的附加要求（补类对超积封闭）是否充分。这显然是必要的。

附录　（高阶对应）

模态公式在所有情形下都定义择代关系上的二阶（Π^1_1）条件，而在某些情形下则定义一阶条件。按照抽象模型论的观点来看，这里会产生两种可能的推广。

我们可以考虑适当的扩充语言来代替一阶对象语言。例如，在前面提到的各种各样非一阶可定义性情形中，所得到表达的关系条件都是在 $L_{\omega_1\omega}$ 中可定义的：带可数合取和析取的一阶逻辑。不过，并非所有的模态公式在这一比较宽广的领域中都会成为可定义的。例如，洛伯公理定义一种良基性，已经知道这一性质超出了 $L_{\omega_1\omega}$，或者说超出了 $L_{\infty\omega}$-族中任意一个语言。另一方面，良基性本身是在对有穷的个体集进行量化的“弱二阶逻辑” L^2 中可定义。因此，虽然达不到全部的Π^1_1，但仍可以为模态公式考虑可定义性的各种各样较大的类。而且事实上，连Π^1_1 这种一般情形本身也要求做深入研究。例如，哪些 Π^1_1-语句容许有模态定义?

这一类高阶逻辑一般都缺乏语义刻画，因此它们的模态片断的语义刻画也难以得到。一个相关的观察也许是这样：在抽象模型论的意义下，$L_{\omega_1\omega}$和 L^2 都具有对部分同构不变的性质。研究模态公式上的这个保持条件是很有意思的。的确，迄今还未发现任何反例，但在时态逻辑中这些反例确实存在（有理数和实数形成部分同构序结构的一个经典例子。可是，时态逻辑中有表达戴德金完全性的公式，在后者中有效而在前一框架中不有效）。另外，模态命题语言本身也可以加强，特别是通过引进命题量词 $\forall p$、$\exists p$ 来加强，这类量词出现在文献中的各种地方。这样，例如，$\forall p(LMp\rightarrow\exists qMLq)$就会成为一个可允许的公式，$L\exists pMp\rightarrow M\forall qMLq$同样也是如此。实际上，这里存在一种选择，是否允许命题量词进入模态算子的辖域。此后我们考虑后面这个较受限制的选择。

在通常的方式下，这里有一个前束系列出现，随所有命题量词前移而起；原来的模态公式形成它的Π^1_1-部分（全称前缀）。接下来的简单情形是Σ^1_1（特称前缀）和 Δ^1_2。事实上，其中最后的情形由于格拜提出的“模态规则”而有一种合理的动机。例如，他观察到禁自返性，虽然模态不可定义，但可表达成克里普克框架上的下述规则：

“若 $\mathbf{F}\models(Lp\wedge\neg p)\rightarrow\varphi[w]$（$\varphi$ 中无 p），则 $\mathbf{F}\models\varphi[w]$”

这里的一般模式是“$\mathbf{F} \models \varphi[w]$，则 $\mathbf{F} \models \psi[w]$”，即由两个 Π_1^1-公式组成的一个蕴涵式：它是 Δ_2^1 的（可以把它写成 $\forall\exists$ 和 $\exists\forall$ 两种形式中的任何一种）。

实际上，上述例子的特例就已经是 Σ_1^1 的，例如，它取 $\forall pq(Lp \wedge \neg p \rightarrow q) \rightarrow \forall qq$，即 $\forall p(Lp \wedge \neg p \rightarrow \forall qq) \rightarrow \forall qq$，$\forall p(Lp \wedge \neg p \rightarrow \bot) \rightarrow \bot$，$\exists p(Lp \wedge \neg p)$。这一领域的另一个相关的观察是，具有上述形式 $\forall \rightarrow \forall$ 的蕴涵命题如果确确实实是一阶可定义的，那就已经有一个一阶可定义的后件。这里我们不深入研究这些特殊的问题，但我们将注意一个较为一般的问题。

正如在高阶逻辑中发生的那样，我们也对谱系的结果感兴趣。例如，一阶可定义性的能力在各个阶段中增加了多少？很明显，Σ_1^1-可定义性实质上只是增加了 $P1$ 中（局部）原则的所有否定，而 Δ_2^1 则只是增加了跨越 $P1$ 和后者的“镜像”的合取及析取。

猜测：高阶模态公式的前束谱系导出了关于择代关系的模态可定义原则的一个相应的递升谱系吗？

至少，这个可能的递升谱系并不能穷尽所有的一阶原则，因为从前面的阐述可知高阶模态公式确实保留有一个基本的保持性：它们的局部真假在过渡到生成子框架时是不变的（生成定理就整个谱系而言得到这个结论，而不只是就原来的模态 Π_1^1-公式而言）。但是另一方面，我们也知道这个语义限制在一阶公式的句法条件方面指的是什么——多亏我们的那些保持定理。这些公式将都是“几乎完全受限的”公式，即由一个从原子公式利用否定、合取和受限量词 $\exists y(Rxy \wedge$ 构造起来的复合公式紧随于一个全称量词之后所形成的公式。

不过，其他一些我们原来的模态公式所具有的基本保持性质就丧失了。正如早就观察到的那样，禁自返性（$\forall x \neg Rxx$）成为可定义的，从而对 p-态射的保持现在就不行了。对超滤扩充的反向保持也不行了，因为前面的例子 $\forall x \exists y(Rxy \wedge Ryy)$ 现在同样成为可定义的［一个直截了当的定义是在一个模态辖域中使用一个命题量词：$M\forall p(Lp \rightarrow p)$。但是有一个命题量词不嵌入于模态辖域的替代物，形如 $\exists p(Mp \wedge \forall qL(p \rightarrow (Lq \rightarrow q)))$］。

因此，我们最后提出两个问题。

问题：每个几乎完全受限的一阶公式 $\forall x\varphi(x)$ 都能在模态命题量词谱系的某个层次得到定义吗？

问题：在模态辖域中加进命题量词能否增加表达能力？



第四部分

高阶可定义性

17 全称二阶语句

模态逻辑的语言可以被看成为某些全称二阶语句的缩写记号。这是第 3 章中使模态公式 φ（带所含命题字母 p_1，…，p_n）与全称二阶语句 $\forall x \forall P_1 \cdots \forall P_n ST(\varphi)$相联系的标准翻译 ST 的要点。这里 $ST(\varphi)$ 含有一元谓词变项 P_1，…，P_n 以及一个二元谓词常项 R。

在本章中，将考虑这样一个二阶语言：它带有相同的谓词常项 R、等词和任意主目个数的谓词变项，允许对谓词进行量化。注意，框架是这个语言的语义结构。事实上，所得到的大多数结果在正好有任何一个一阶参变项集（而非仅仅是 R）参与的情形下仍会通过；不过在眼前的探索中记法依然较为简单（此外，本著作的精神实质是，研究一个二元关系的——一阶、模态或者二阶——理论）。这个二阶语言中，也只有形如

$$\forall X_1 \cdots \forall X_m \varphi$$

的全称语句才是现在注意的焦点，这里 φ 是一个用 X_1，…，X_m，R 和 = 表达的一阶语句；它是模态公式的最直接的推广（注意，L_0-语句作为一个极端情形而被包含在内）。从一个明显的谱系看来，这样的全称语句叫作$\Pi_1^1(R)$-语句。[17] 例如，$\Sigma_1^1(R)$-语句将形如

$$\exists X_1 \cdots \exists X_m \varphi$$

这里 φ 同上面一样；而$\Pi_2^1(R)$-语句则形如

$$\forall X_1 \cdots \forall X_m \exists Y_1 \cdots \exists Y_n \varphi$$

等等。将要研究的是前三部分的某些主要课题在这一较宽的领域中怎样存活。

首先，在推论2.9 中已证得，当书写模态公式时 M 和→作为初始符号是充分的。不过，这里最自然的初始符号是 {∀，→}。为了明白这一点，首先仅用∀，→和¬ 写出 φ。然后通过用 $\alpha \to \bot$ 替换形如$\neg\alpha$ 的子公式消除掉 φ 中的否定号。现在⊥也可因注意到下述事实而被消除掉：对于任意一个用∀，→和⊥表达

的一阶公式 φ 和任意一个不在 φ 中出现的一元谓词变项 Q，下面这个语句

$$\varphi \leftrightarrow \forall Q([\forall xQx/\bot]\varphi \vee \forall xQx)$$

是普遍有效的。此外，利用重言式

$$(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow ((\alpha \to \beta) \to \beta)$$

析取也可换成蕴涵的一个组合。另一个简化则需要多想一下。

引理 17.1 任意一个 $\Pi_1^1(R)$-语句逻辑等值于一个形如

$$\forall X_1 \cdots \forall X_n \exists y_1 \cdots \exists y_m \forall z_1 \cdots \forall z_k \varphi$$

的语句；这里 φ 是一个无量词的一阶语句。

证明： 证明这引理的一个办法是利用斯科伦函项，以后再把它们换成适当的谓词。这是最初的报告[7]中所用的方法。这里要引用一种技巧，它出现在巴威斯的专著《可容许集与结构》（*Admissible Sets and Structures*, Springer, Berlin, 1975）中（也可参看引理 11.10）。考虑任意一个 $\Pi_1^1(R)$-语句 $\forall X_1 \cdots \forall X_n\varphi$。用 $\to$，$\neg$ 和 $\forall$ 写出 φ。现在，列举 φ 的所有子公式为 φ_1，…，φ_t。对于任意一个 φ_i，定义

$A_i = \varphi_i$，当 φ_i 是原子时；

$A_i = Pz_1 \cdots z_k$，其中 P 是某个新的 k-元谓词变项；当 φ_i 是一个所含自由变项为 z_1，…，z_k 的复合公式时。

当 $\varphi_i = \varphi$ 本身时，A_i 将成为一个"零元"谓词变项 P_φ。

作所有"相关语句"的合取如下。如果 $\varphi_j = \neg\varphi_i$，则加入 $\forall z_1 \cdots \forall z_k(A_j \leftrightarrow \neg A_i)$，这里 z_1，…，z_k 是相关的全部自由变项。如果 $\varphi_j = \varphi_i \to \varphi_k$，则加入 $\forall z_1 \cdots \forall z_k(A_j \leftrightarrow (A_i \to A_k))$。最后，如果 $\varphi_j = \forall z\varphi_i$，则同时加入 $\forall z_1 \cdots \forall z_k(\forall z A_i \to A_j)$ 和 $\forall z_1 \cdots \forall z_k(A_j \to \forall z A_i)$。称所产生的合取式为 $A(\varphi)$。

注意，$A(\varphi)$ 中的各个合取支或是等值于一个全称一阶公式，或是等值于一个形如"$\forall z_1 \cdots \forall z_k \exists z$-无量词部分"的公式。因此，$A(\varphi)$ 本身就等值于一个形如 $\forall y_1 \cdots \forall y_m \exists z_1 \cdots \exists z_k\psi$ 的语句，这里 ψ 是无量词的。因而 $A(\varphi) \to P_\varphi$ 等值于一个形如 $\exists y_1 \cdots \exists y_m \forall z_1 \cdots \forall z_k\psi$ 的语句，这里 ψ 是无量词的。

要得到本引理中的结论，只需注意到下述事实即可：对出现在 A_1，…，A_t 中的谓词变项 P_1，…，P_s（不同于 R，X_1，…，X_n）而言，$\forall X_1 \cdots \forall X_n\varphi$ 逻辑等值于 $\forall X_1 \cdots \forall X_n \forall P_1 \cdots \forall P_s(A(\varphi) \to P_\varphi)$［要点就在于，每当 $A(\varphi)$ 成立时，语句 $\forall z_1 \cdots \forall z_k(A_i \leftrightarrow \varphi_i)$ 为真（$1 \leq i \leq t$）］。■

正如在模态逻辑的情形那样，尚有推广"语义结构"概念的余地。原来的框架是这个二阶语言的标准模型[33]；但我们也需要二阶量词只对论域中谓词的一部分进行取值的结构。这样的"一般模型"将被称为广义框架（generated frame），以便跟第 4 章中的"一般框架"相区别。可以定义一个广义框架为任意

一个序组〈**F**，**W**〉，这里 **F** 是一个框架而 **W** 则是由 W 上的谓词组成的一个集。但是这个概念稍微自由一点，因为在这样的结构中我们想要保留的某些普遍有效性质将会成为可否证的。一个例子就是内涵原则：对一阶公式 $\varphi=\varphi(x_1, \cdots, x_k)$，

$$\exists Y\forall x_1\cdots\forall x_k(\varphi\leftrightarrow Yx_1\cdots x_k)$$

或许在眼前的语境中较能说明问题的是全称例示原则（内涵原则跟它直接相关）：

$$\forall Y\varphi(Y)\rightarrow\varphi(\psi)$$

这里 Y 是一个 k 元谓词变项，而 ψ 则是一个含有 k 个自由变项的一阶公式，它对 φ 中的 Y 可代入（总是取合适的谓词以避免约束变项混乱）。这导出这样的要求：要求 **W** 对"可定义谓词"封闭。形式地讲就是，如果 $\varphi=\varphi(x_1, \cdots, x_k, y_1, \cdots, y_m, Y_1, \cdots, Y_n)$ 是任意一个带有自由个体变项 $x_1, \cdots, x_k, y_1, \cdots, y_m$ 和（自由的）谓词变项 $Y_1, \cdots, Y_n$ 的一阶公式，并且如果 $Z_1, \cdots, Z_n$ 是 **W** 中使得每当 Y_i 是 l 元时 Z_i（$1\leqslant i\leqslant n$）也为 l 元的谓词，并且（最后）如果 $w_1, \cdots, w_m$ 是 W 中的元素，那么谓词 $\{\langle v_1, \cdots, v_k\rangle \mid \mathbf{F}\models\varphi(v_1, \cdots, v_k, w_1, \cdots, w_m, Z_1, \cdots, Z_n)\}$ 是在 **W** 中的。这个要求也可归纳地陈述如下：

定义 17.2　一个广义框架就是一个序组〈**F**，**W**〉，这里 **F** 是一个框架〈W，R〉，而 **W** 则是由 W 上谓词组成的一个集，它满足

（i）R 是在 **W** 中，$=$和所有单元素集 $\{w\}$（$w\in W$）也都是如此；

（ii）如果一个 n 元的 Z 是在 **W** 中的，则 W^n-Z 是在 **W** 中的（补）；

（iii）如果一个 n 元的 Z_1 和一个 m 元的 Z_2 都在 **W** 中，则 $n+m$ 元的谓词 $Z_1\cdot Z_2$ 是在 **W** 中的，它被定义为由 W^{n+m} 中所有那些使得 $\langle w_1, \cdots, w_n\rangle\in Z_1$ 且 $\langle w_{n+1}, \cdots, w_{n+m}\rangle\in Z_2$ 的序列 $\langle w_1, \cdots, w_n, w_{n+1}, \cdots, w_{n+m}\rangle$ 所组成的集（合取）；

（iv）如果一个 $n+1$ 元的 Z 是在 **W** 中的，则谓词 $\exists Z$ 是在 **W** 中的，它被定义为由 W^n 中所有那些有 $w\in W$ 使得 $\langle w_1, \cdots, w_n, w\rangle\in Z$ 的序列 $\langle w_1, \cdots, w_n\rangle$ 所组成的集（投射）；

（v）如果一个 n 元的 Z 是在 **W** 中的，并且 $i, j\leqslant n$，那么谓词 $\pi_{ij}Z$ 是在 **W** 中的，它被定义为由 W^n 中所有那些在第 i 位上和第 j 位上成员对换之后仍属于 Z 的序列所组成的集（置换）；

（vi）如果一个 $n+1$ 元的 Z 是在 **W** 中的，则 n 元的谓词 IZ 是在 **W** 中的，它被定义为由 W^n 中所有那些使得 $\langle w_1, \cdots, w_n, w_n\rangle\in Z$ 的序列 $\langle w_1, \cdots, w_n\rangle$ 所组成的集（同化）。

对于一般框架而言可以使 **W** 上的闭包条件更简单一点（参看定义 4.2），因

为模态语言很简单——只需要补、合取和“受限投射”，涉及的只是一元谓词（即个体域的子集）。

注意，任意一个给定框架 **F** 上的最小的广义框架〈**F**，**W**〉都有一个由恰好由 W 上那些用 W 中参变项 L_0-可定义的谓词所组成的 **W**（参看定义9.14）。在当前的语境中广义框架的这一概念并非是唯一可能的一个，但它将用作下述研究的一个有用的工具。

$\Pi_1^1(R)$-语句的普遍有效性并不产生任何较一阶逻辑更新的东西。因为，$\forall X_1\cdots\forall X_n\varphi$ 在所有框架中成立，当且仅当，它在所有广义框架中成立，当且仅当，一阶语句 φ 普遍有效。不过，语义后承更有意思。

定义 17.3　对任意一个 $\Pi_1^1(R)$-语句集 Σ 和任意一个 $\Pi_1^1(R)$-语句 φ，

$\Sigma\models\varphi$ 是指对于所有的框架 **F**，如果 $\mathbf{F}\models\Sigma$，那么 $\mathbf{F}\models\varphi$

$\Sigma\models_g\varphi$ 是指对于所有的广义框架〈**F**，**W**〉，如果〈**F**，**W**〉$\models\Sigma$，那么〈**F**，**W**〉$\models\varphi$。

概念“$\models$”是非常复杂的；正如第1章中所注意到的那样。例如，二阶策梅罗－弗兰克尔集论（ZF^2）可以用单独一个 $\Pi_1^1(R)$-语句来公理化。于是，由于它的一阶部分不是算术可定义的（假如这成立，那么算术真就会是算术可定义的，正如第1章中所示），故而“$\models$”也不能是算术可定义的［作为 $\Pi_1^1(R)$-语句的哥德尔数之间的一个关系］。

不过，“$\models_g$”被证明是可公理化的，甚至对我们完整的二阶语言也是如此。我们仅仅是将一阶逻辑的某个完全的公理系统翻译到二阶逻辑而已，例如，取［20］中所给的那个公理系统。为了确定我们对这个问题的思考，这里取下述公理。

(i)　$\forall X(\varphi\to\psi)\to(\forall X\varphi\to\forall X\psi)$

(ii)　$\varphi\to\forall X\varphi$

要求 X 不在 φ 中自由出现；

(iii)　$\forall X\varphi\to[\psi/X]\varphi$

这里 X 是任意一个 k 元谓词变项，并且 ψ 是任意一个含有 R 及可能含有谓词变项的一阶公式，它的自由个体变项为 y_1，…，y_k。$[\psi/X]\varphi$ 是将 φ 中形如 $Xz_1\cdots z_k$ 的子公式换成 $[z_1/y_1,\cdots,z_k/y_k]\psi$ 后所得的结果，每当有约束变项混乱的危险时作约束变项改名。

其余公理是那些常用的一阶公理。仅有的推理规则是肯定前件式。然后按通常的方式定义 $\Sigma\vdash\varphi$。

注意，各种各样熟知的原则在这个系统中并非都是可推导的。例如，（为处理斯科伦范式所需要的）选择公理不是一个定理。当然，也可以按这样的形式：

$$\forall x\exists yRxy\to\exists Z(\forall x\exists!y\,Zxy\wedge\forall x\forall y(Zxy\to Rxy))$$

将它附加为公理。完全性结果将不加证明地陈述出来。

定理 17.4　对于所有的Σ和φ，$\Sigma \vdash \varphi$当且仅当$\Sigma \models_g \varphi$。

就一个二元关系的理论而言，通常有三种探讨方式。第一，它可以用单独一个L_0-语句来公理化。以“小于”为序的有理数理论就是一个例子。第二，因为“小于”关系的某些性质最终被证明为是在L_0中不可定义的（例如，戴德金完备性，或者良基性），故而常常有利用$\Pi_1^1(R)$-语句的二阶途径。二阶策梅罗－弗兰克尔集论，或者二阶数论，或者以“小于”为序的实数理论都是例子。第三，有利用公理模式来作的一阶探讨。在某种意义下，它是介于前二种之间的，受启发于想要尽可能多的二阶探讨而又不失去第一种探讨的合乎需要的性质。ZF本身就是一个例子，因而一阶皮亚诺算术和塔尔斯基的“初等几何”也都是例子。其中的第三种探讨可以通过允许语言中有谓词变项而得到稍许推广，正如以上所做。

第6章中最重要的概念是完全性概念。完全的模态逻辑对于“真实的”$\models$和更为人为的$\models_g$之间的差别（可说）是不敏感的。

定义 17.5　Σ为完全的，是指对于所有的$\Pi_1^1(R)$-语句φ，$\Sigma \models \varphi$，当且仅当，$\Sigma \vdash \varphi$。

如果Σ是完全的，那么由它所有的L_0-后承所组成的集是递归可公理化的。于是由此可知，例如，ZF^2不是完全的。这类不完全性现象还有一些模态例子，以定理6.6为证。将以“小于”为序的有理数理论公理化的那个L_0-语句也公理化它们的$\Pi_1^1(R)$-理论：这可从它为χ_0-范畴的得出——并且它因此而为完全的。

那些熟知的模态完全性定理[67]在这一方面引出了许多明显的问题。例如，$L(Lp \to p) \to Lp$相对于由所有其逆关系为良基关系的传递框架所组成的类是完全的。那么定义良基性的$\Pi_1^1(R)$-语句是完全的吗？关于在不计同构意义下定义$\langle IN, < \rangle$的那个$\Pi_1^1(R)$-语句也有一个类似的问题。

对这些一般问题的回答是否定性的。例如，不难找出一个一阶语句$\varphi = \varphi(R, \in)$，使得对$\varphi$的各个模型$\langle D, R^*, \in^* \rangle$（这里$R^*$是良基的），$\langle D, \in^* \rangle$同构于$\langle V_\omega, \in \rangle$（即遗传有穷集）。但是，另一方面，对于某个将算术语句译成集论语句（即用$\in$和$=$表达的一阶语句）$\tau(\alpha)$的、合适的翻译τ，下述当且仅当命题仍将成立。α将是算术中的一个真命题，当且仅当，“良基性”蕴涵$\Pi_1^1(R)$-语句$\forall \in (\varphi(R, \in) \to \tau(\alpha))$。由此可知，由良基性的所有语义$\Pi_1^1(R)$-后承所组成的集不是算术可定义的，据塔尔斯基定理而得。可是（例如）$\langle IN, < \rangle$的一元的$\Pi_1^1(R)$-理论在上述意义下仍可以是完全的（这里所给的归纳实质上用到那个二元谓词变项$\in$）。的确，算术复杂性在这里不成其为什么障碍——因为据拉

宾定理可知这个一元理论甚至还是可判定的（这个猜测与此同时已由杜茨证明。一个相关的结果最终也被证明为对实数理论成立）。

其次，还有一个跟 $\bar{M}1$ 平行的概念。

定义 17.6 *USO*1 是由所有这样的 $\Pi_1^1(R)$-语句 φ 所组成的集：存在一个 L_0-语句 ψ 使得 $\varphi\leftrightarrow\psi$ 在所有框架上为真的。

$\Pi_1^1(R)$-语句对超积保持[17]。据凯斯勒定理可知，一个框架类 **K** 是 L_0-初等的当且仅当 **K** 与其补类二者都对超积和同构象封闭。这个结果产生 *USO*1 一个明显的语义刻画。

定理 17.7 一个 $\Pi_1^1(R)$-语句是在 *USO*1 中的，当且仅当，它是对超积保持的。

现在，回顾一下引理 3.12 及其推论 3.13：任意一个形如 $\forall X_1\cdots\forall X_n\forall y_1\cdots\forall y_m\varphi$ 的 $\Pi_1^1(R)$-语句是对超积保持的，这里 φ 是从 L_0-公式和形如 $X_iz_1\cdots z_{ni}$（$1\leqslant i\leqslant n$）的原子公式仅用布尔算子构造起来的公式。

下述引理是一个有关的结果。

引理 17.8 任意一个形如 $\forall X_1\cdots\forall X_n\exists y_1\cdots\exists y_m\varphi$ 的 Π_1^1（R）-语句都是对超幂保持的，这里 φ 是如上构造起来的公式。

证明： 下述论证确定这种语句甚至是对 L_0-初等等价保持的。令 $\mathbf{F}_1$，$\mathbf{F}_2$ 是使得 $\mathbf{F}_1\not\models\forall X_1\cdots\forall X_n\exists y_1\cdots\exists y_m\varphi$ 的 L_0 - 初等等价框架。将要证明的是 $\mathbf{F}_2\not\models\forall X_1\cdots\forall X_n\exists y_1\cdots\exists y_m\varphi$。对各个 $w\in W_2$，附加一个名字 $\mathbf{w}$ 到 L_0 中；最终得到一个语言 L_0'。

集合 $Th_{L'_0}$（$\mathbf{F}_2$）$\cup$ $\{\forall y_1\cdots\forall y_m\neg\varphi\}$ 是有穷可满足的。因为，考虑取自 $Th_{L'_0}(\mathbf{F}_2)$ 的任意有穷多个语句 ψ_1，…，ψ_k。假定 $\{\psi_1,\cdots,\psi_k\}\cup\{\forall y_1\cdots\forall y_m\neg\varphi\}$ 没有模型，即 $\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_k\models\exists y_1\cdots\exists y_m\varphi$。令 $\psi=\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_k$ 所含新常项为 $\mathbf{w}_1$，…，$\mathbf{w}_s$，那么 $\psi'=\exists z_1\cdots\exists z_s[z_1/\mathbf{w}_1,\cdots,z_s/\mathbf{w}_s]\ \psi\models\exists y_1\cdots\exists y_m\varphi$。$\psi'$ 是一个 L_0-语句，X_1，…，X_n 中没有一个在此语句中出现。所以，由此甚至还可得到 $\psi'\models\forall X_1\cdots\forall X_n\exists y_1\cdots\exists y_m\varphi$。由于 ψ' 在 $\mathbf{F}_2$ 上为真，故而它也在 $\mathbf{F}_1$ 上成立，因为这两个结构是 L_0-初等等价的。但是，另一方面，$\mathbf{F}_1\models\forall X_1\cdots\forall X_n\exists y_1\cdots\exists y_m\varphi$，矛盾于所设。

因为集合 $Th_{L'_0}$（$\mathbf{F}_2$）$\cup$ $\{\forall y_1\cdots\forall y_m\neg\varphi\}$ 是有穷可满足的，故而整个集 $Th_{L'_0}(\mathbf{F}_2)\cup\{\forall y_1\cdots\forall y_m\neg\varphi\}$ 有一个模型 $\mathbf{F}_3$（据紧致性定理而得）。$\mathbf{F}_2$ 是 L_0-初等嵌入于 $\mathbf{F}_3$ 的，而且实际上也可取成为 $\mathbf{F}_3$ 的一个 L_0-初等子结构。相应于公式复杂度的一个简单的归纳就可证明，对于任意一个从 L_0-公式和形如 $X_iz_1\cdots z_{ni}$ 利用布尔算子构造起来的公式 $\alpha=\alpha(x_1,\cdots,x_n)$，下述结论成立：对于所有的

$w_1, \cdots, w_n \in W_2$,

$$\mathbf{F}_3 \vDash \alpha[w_1, \cdots, w_n]，当且仅当，\mathbf{F}_2 \vDash \alpha[w_1, \cdots, w_n]。$$

一个直接的推论是，在 $\mathbf{F}_3$ 中为真的 $\forall y_1 \cdots \forall y_m \neg\varphi$（这里 $\neg\varphi$ 是如所描述的一个公式）也在 $\mathbf{F}_3$ 到 $\mathbf{F}_2$ 的限制中为真。这个限制本身是 $\mathbf{F}_2$ 到 $\forall y_1 \cdots \forall y_m \neg\varphi$ 的一个模型的一个膨胀。换句话说，$\mathbf{F}_2 \vDash \exists X_1 \cdots \exists X_n \forall y_1 \cdots \forall y_m \neg\varphi$。 ■

引理 17.8 是最好的可能结果。因为，下述 $\Pi_1^1(R)$-语句等值于一个具此形式的 $\Pi_1^1(R)$-语句；但它不对超积保持。令 L_0-语句 α 表达这样的要求：R 是带一个始元和一个终元的禁自返线性序，使得除那个始元外任意一个元素都有一个直接前驱，并且除那个终元外任意一个元素也都有一个直接后继。语句

$$\forall P(\alpha \wedge (\forall x \forall y((Px \wedge \neg Py) \to Rxy) \to (\exists x(\neg \exists y Ryx \wedge \neg Px) \vee \exists x(\neg \exists y Rxy \wedge Px) \vee \exists x \exists y(Rxy \wedge \neg \exists z(Rxz \wedge Rzy) \wedge Px \wedge \neg Py))$$

定义由所有有穷线性序所组成的类，这是一个对超幂封闭而不对超积封闭的类。很容易看出，这个语句等值于一个形如 $\forall P \exists x_1 \cdots \exists x_6 \varphi$ 的语句，这里的 φ 如引理 17.8 中所述。

鉴于引理 17.1，别指望在定理 17.7 或引理 17.8 上做任何改进。事实上，下述 $\Pi_1^1(R)$-语句 ψ 虽然同时等值于一个形如 $\forall P \exists x_1 \exists x_2 \forall x_3 \forall x_4 \varphi$ 的语句和一个形如 $\forall P \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \exists x_4 \varphi$ 的语句，但它不对超幂保持；这里的 φ 如引理 17.8 中所述。令 L_0-语句 β 公理化 $Th_{L_0}(\langle IN, < \rangle)$。则语句

$$\psi = \forall P(\beta \wedge ((\exists x(\neg \exists y Ryx \wedge Px) \wedge \forall x(Px \to \forall y((Rxy \wedge \neg \exists z(Rxz \wedge Rzy)) \to Py))) \to \forall x Px))$$

定义 $\langle IN, < \rangle$，并且因此而不对超幂保持。

全部有穷线性序形成一个 Σ-初等类，而不是初等类。因此，这里没有任何一个等价于定理 8.6 的结论成立。不过，正如第 8 章中所说明的那样，仍有两个归约结果：

(i) 若一个 $\Pi_1^1(R)$-语句是 $\Sigma\boldsymbol{\Delta}$-初等的，则它是 Σ-初等的；

(ii) 若一个 $\Pi_1^1(R)$-语句是 $\Sigma\Delta$-初等的，则它是 Σ-初等的。

这两个断言都可由一个例行的紧致性论证得到。

*USO*1 的另一个刻画是用定理 13.6 的证明的一个简单推广得到的。令 *UV*2 是由所有框架上都为真的二阶语句所组成的集。

定理 17.9　一个 $\Pi_1^1(R)$-语句是在 *USO*1 中的，当且仅当，它是对从使 *UV*2 在其中成立的广义框架到其基础（标准）框架的过渡保持的。

证明： 从左到右的证明恰好跟定理 13.6 的证明一样。至于另一方向，将要证明的是，任意一个具有所述保持性质的 $\Pi_1^1(R)$-语句 φ 是对超积保持的。

考虑一个框架集 $\{\mathbf{F}_i \mid i\in I\}$，使得对各个 $i\in I$ 都有 $\mathbf{F}_i\models\varphi$。令 U 是 I 上的任意一个超滤。必须证明的是，$\mathbf{F}=\Pi_U\mathbf{F}_i\models\varphi$。为了弄清这一点，构造一个广义框架〈$\mathbf{F}$, $\mathbf{W}$〉使 φ 和 $UV2$ 都在其中成立。〈$\mathbf{F}$, $\mathbf{W}$〉是通过一个超积构造找到的，这个超积构造最初在第 4 章中用于一般框架情形。$\mathbf{W}$ 由所有谓词 $\Pi_U\{S_i \mid i\in I\}$ 组成，这里对某个 $n\geqslant 1$，$S_i\subseteq W_i^n$ $(i\in I)$；谓词 $\Pi_U\{S_i \mid i\in I\}$ 由 $\Pi_U\{S_i \mid i\in I\}$ $(f_U^1, \cdots, f_U^n)$，当且仅当，$\{i\in I \mid S_i(f^1(i), \cdots, f^n(i))\}\in U$ 定义。

对于眼前这个二阶逻辑中的任意一个以 x_1, …, x_k 为自由个体变项并以 X_1, …, X_m 为自由谓词变项的公式 ψ，下述等价命题成立：

$$\langle\mathbf{F},\mathbf{W}\rangle\models\psi\,[f_U^1, \cdots, f_U^k;\ \Pi_U\{S_i^1 \mid i\in I\}, \cdots, \Pi_U\{S_i^m \mid i\in I\}]$$

当且仅当，

$$\{i\in I \mid \mathbf{F}_i\models\psi[f^1(i), \cdots, f^k(i);\ S_i^1, \cdots, S_i^m]\}\in U$$

通过施归纳于 ψ 的复杂度上来证明这一命题。$\psi=Rx_ix_j$，$\psi=\neg\chi$，$\psi=\chi_1\rightarrow\chi_2$ 和 $\psi=\exists y\chi$ 诸情形都恰好像在沃斯定理中那样处理。若 ψ 是 $X_jx_{k_1}\cdots x_{k_{nj}}$，则论证如下。

〈$\mathbf{F}$,$\mathbf{W}$〉$\models X_jx_{k_1}\cdots x_{k_{nj}}[f_U^1,\cdots,f_U^k;\Pi_U\{S_i^1 \mid i\in I\},\cdots,\Pi_U\{S_i^m \mid i\in I\}]$，当且仅当，(据真值定义而得) $\Pi_U\{S_i^j \mid i\in I\}(f_U^{k_1},\cdots,f_U^{k_{nj}})$，当且仅当，(据定义而得) $\{i\in I \mid S_i^j(f^{k_1}(i),\cdots,f^{k_{nj}}(i))\}\in U$，当且仅当，(据真值定义而得) $\{i\in I \mid \mathbf{F}_i\models X_jx_{k_1}\cdots x_{k_{nj}}[f^1(i), \cdots, f^k(i);S_i^1, \cdots, S_i^m]\}\in U$。

最后，若 ψ 是 $\exists Y\chi$，则论证类似于对个体量词所作。若〈$\mathbf{F}$,$\mathbf{W}$〉$\models\exists Y\chi[f_U^1,\cdots,f_U^k;\Pi_U\{S_i^1 \mid i\in I\}, \cdots,\Pi_U\{S_i^m \mid i\in I\}]$，则有某个谓词 $\Pi_U\{S_i \mid i\in I\}$ 使得〈$\mathbf{F}$, $\mathbf{W}$〉$\models\chi[f_U^1,\cdots,f_U^k;\Pi_U\{S_i^1 \mid i\in I\}, \cdots, \Pi_U\{S_i^m \mid i\in I\}]$。据归纳假设可得，$\{i\in I \mid \mathbf{F}_i\models\chi[f^1(i), \cdots,f^k(i);S_i^1, \cdots, S_i^m, S_i]\}\in U$。于是，这个集被包含于 $\{i\in I \mid \mathbf{F}_i\models\exists y\chi[f^1(i), \cdots, f^k(i);\ S_i^1, \cdots, S_i^m]\}$，因此，后面这个集也在 U 中。

反过来，如果后面这个集 X 属于 U，则对各个 $i\in X$ 而言，可以选定谓词 S_i(对于 X 之外的 i，选择是任意的)使得 $\{i\in I \mid \mathbf{F}_i\models\chi[f^1(i), \cdots,f^k(i);\ S_i^1, \cdots,S_i^m, S_i]\}$ 包含 X，从而属于 U。另一方面，$\Pi_U\{S_i \mid i\in I\}$ 显然就是所要求的谓词，它使得〈$\mathbf{F}$,$\mathbf{W}$〉$\models\chi[f_U^1,\cdots,f_U^k;\Pi_U\{S_i^1 \mid i\in I\}, \cdots,\Pi_U\{S_i^m \mid i\in I\}, \Pi_U\{S_i \mid i\in I\}]$ 成立。

从上述等价直接可知〈$\mathbf{F}$, $\mathbf{W}$〉是一个广义框架。此外，由于 φ 和 $UV2$ 两者都在所有因子 $\mathbf{F}_i$ 中为真，故而它们将在〈$\mathbf{F}$, $\mathbf{W}$〉中为真。 ■

就 $USO1$ 的句法复杂性而论，可以给出一个比关于 $\overline{M}1$ 的那个答案更确定的回答（参见推论 7.9）。

定理 17.10 $USO1$ 不是算术可定义的。

证明：取任意一个在不计同构意义下定义 $\langle V_\omega, \in\rangle$（即遗传有穷集）的 $\Pi_1^1(R)$-语句 φ。例如，令 φ 是不带无穷公理的 ZF^2；但附带一个公理以断定由所有序数组成的类同构于“真实的” ω。令 α 是任意一个算术语句；即 $\alpha=\alpha(0, S, +, \cdot)$。0，$S$，+ 和 · 都可以在 φ 的基础上定义出来（只局部地用到 φ），所以 α 在 L_0 中有一个能行的翻译 α^*，使得 $IN \models \alpha$，当且仅当，$\varphi \models \alpha^*$。我们断定

$$\varphi \models \alpha^*，当且仅当，\varphi \vee \alpha^* \in USO1$$

这里 $\varphi \vee \alpha^*$ 可以认作是一个 $\Pi_1^1(R)$-语句，通过拓宽 φ 中全称二阶量词的辖域使之包含 α^* 而得。

首先，假设 $\varphi \models \alpha^*$。则显然 $(\varphi \vee \alpha^*) \leftrightarrow \alpha^*$ 在所有框架上为真，因而 $\varphi \vee \alpha^* \in USO1$。其次，设对某个 L_0-语句 β，$(\varphi \vee \alpha^*) \leftrightarrow \beta$ 在所有框架上为真。那么，由 $\langle V_\omega, \in\rangle \models \varphi$ 就得 $\langle V_\omega, \in\rangle \models \beta$。令 **F** 是 $\langle V_\omega, \in\rangle$ 的任意一个不可数的 L_0-初等扩充。**F** 不同构于 $\langle V_\omega, \in\rangle$，从而有 $\mathbf{F} \not\models \varphi$。另一方面，$\mathbf{F} \models \beta$，因而有 $\mathbf{F} \models \varphi \vee \alpha^*$。由此可知 $\mathbf{F} \models \alpha^*$，从而有 $\langle V_\omega, \in\rangle \models \alpha^*$。换句话说，$\varphi \models \alpha^*$。 ■

在上述证明中选取适当的 φ 甚至能表明，$USO1$ 的限制于仅带一个（一元）二阶量词的 $\Pi_1^1(R)$-语句的部分也不是算术可定义的。

但是，当舍弃参变项 R（即仅保留等词和谓词变项）时，$USO1$ 就成为算术可定义的。

定理 17.11　由 $USO1$ 中所有无谓词常项 R 出现的语句所组成的集有一个为 Σ_2^0 的算术定义。

证明：只需证明集合 $\{\varphi \mid \varphi$ 是无 R 出现的 $\Pi_1^1(R)$-语句且关于它有一阶纯等词语句 ψ 使得 $\varphi \leftrightarrow \psi$ 在所有个体域上都为真$\}$ 有 Σ_2^0-定义（“Σ_2^0”按通常的方式指算术谱系）。这一结论则由下述两个观察结果得出。

第一，“$\psi \rightarrow \varphi$ 在所有个体域上都为真”这一概念是 Σ_1^0 的。第二，“$\varphi \rightarrow \psi$ 在所有个体域上都为真”这一概念是 Π_1^0 的。因此，存在一个“ψ 使得 $\psi \rightarrow \varphi$ 和 $\varphi \rightarrow \psi$ 二者都在所有个体域上都为真”这一概念是 Σ_2^0 的［用模式表达就是 $\exists(\exists A \wedge \forall B) = \exists\exists(A \wedge \forall B) = \exists\exists\forall(A \wedge B)$］。

第一个观察结果是明显的。$\psi \rightarrow \varphi$ 在所有个体域上都为真，当且仅当，$\psi \models \varphi^-$（这里 φ^- 是不带其二阶量词的 φ），并且据一阶逻辑的完全性定理可知，这个概念是 Σ_1^0 的。第二个观察结果要求做些演算。开始先注意，从 ψ 可以能行地得到一个 ψ^*，使得 ψ^* 是 ψ 的一个具有下述形式之一的逻辑等值式：

(i) $\perp$；

(ii) $\top$;

(iii) $(P_{n_1} \vee \cdots \vee P_{n_k})$ 或$\neg(P_{n_1} \vee \cdots \vee P_{n_k})$。

(这里的 P_i 是表达个体域中恰有 i 个元素这一事实的那个纯等词语句)。这样，"$\varphi \rightarrow \psi$ 在所有个体域上都为真"这一陈述就等值于下述的析取命题："(i) $\psi^* = \bot$ 且$\neg \varphi$ 在所有个体域上都为真，或者 (ii) $\psi^* = \top$ 且一切妥当，或者 (iii) $\psi^* = (P_{n_1} \vee \cdots \vee P_{n_k})$ 且 $\varphi \rightarrow (P_{n_1} \vee \cdots \vee P_{n_k})$ 在所有个体域上都为真，或者 (iv) $\psi^* \neg = (P_{n_1} \vee \cdots \vee P_{n_k})$ 且 $(P_{n_1} \vee \cdots \vee P_{n_k}) \rightarrow \neg\varphi$ 在所有个体域上都为真。"只需证明所有这四个析取支都有 Π_1^0 定义就可以。令 $\varphi = \forall X_1 \cdots \forall X_n \chi$，这里 $\chi = \chi(X_1, \cdots, X_n, =)$ 是一个一阶语句。析取支 (i) 等于"$\exists X_1 \cdots \exists X_n \neg \chi$ 在所有个体域上都为真"。据骆文汉姆 - 斯科伦 - 塔尔斯基定理可知，如果 $\exists X_1 \cdots \exists X_n \neg \chi$ 在一个无穷个体域上为真则它在所有无穷个体域上都为真。此外，据紧致性定理可知，如果 $\exists X_1 \cdots \exists X_n \neg \chi$ 在所有有穷个体域上都为真，则它至少在一个无穷个体域上为真。由此可知，$\exists X_1 \cdots \exists X_n \neg \chi$ 在所有个体域上都为真当且仅当它在所有有穷个体域上都为真。而后一个概念是 Π_1^0 的。情形 (ii) 显然。情形 (iii) 类似 (i)：它等于"$\exists X_1 \cdots \exists X_n \neg \chi$ 在所有其基数不同于 $n_1, \cdots, n_k$ 的有穷个体域上都为真"。最后情形 (iv) 等于断定 $\exists X_1 \cdots \exists X_n \neg \chi$ 在基数为 $n_1, \cdots, n_k$ 的有穷个体域上为真：这是可以递归地验证的断言。 ■

已经说过，广义框架满足的闭包条件正像 $\overline{M}_1^{def}$ 的定义（定义 9.14）中的闭包条件。下述概念确实推广了该定义背后的想法。

定义 17.12 *GUSO*1 就是由 $\Pi_1^1(R)$-语句所组成的集，所有这些语句对从任意一个使它们在其中成立的广义框架〈**F**, **W**〉到基础框架 **F** 的过渡保持。

类似于定理 9.15 的一个结果在这里同样成立。

定理 17.13 $GUSO1 \subsetneq USO1$；*GUSO*1 是递归可枚举的。

证明：由定理 17.9 的证明可知，$GUSO1 \subseteq USO1$。$(Lp \rightarrow LLp) \wedge (LMp \rightarrow MLp)$ 的例子现在也起作用：它属于 *USO*1 但不属于 *GUSO*1（参看第 9 章）。最后，由下一个结果可知，*GUSO*1 是递归可枚举的。 ■

定理 17.14 一个 $\Pi_1^1(R)$-语句是在 *GUSO*1 中的，当且仅当，存在某个 L_0-语句 ψ 使得 $\varphi \leftrightarrow \psi$ 在所有广义框架上都为真。

证明：如果有一个如所描述的语句 ψ，并且如果〈**F**, **W**〉是一个使 φ 在其上成立的广义框架，那么也有〈**F**, **W**〉$\models \psi$。由于 ψ 是一个 L_0-语句，故而这意味着 $\mathbf{F} \models \psi$，从而还有 $\mathbf{F} \models \varphi$（任意一个框架按一种明显的方式构成一个广义框架）。

如果 $\varphi \in GUSO1$ 如上定义，那么据定理 13.7 可知，$\varphi \in USO1$。即有一个

L_0-语句 ψ 使得 $\varphi \to \psi$ 在所有框架上都为真。偏巧，$\varphi \leftrightarrow \psi$ 还在所有广义框架上都为真。因为，令 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle \models \varphi$。由于 $\varphi \in GUSO1$，故而有 $\mathbf{F} \models \varphi$。那么也有 $\mathbf{F} \models \psi$,从而有 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle \models \psi$。因为 ψ 是一个 L_0-语句。另一方面，如果 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle \models \psi$，则因同样的理由有 $\mathbf{F} \models \psi$，从而有 $\mathbf{F} \models \varphi$。因为 φ 是一个 $\Pi_1^1(R)$-语句，故而更有理由说 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle \models \varphi$ 成立。 ■

定理 17.14 以一种很简单的方式使 $GUSO1$ 和 $USO1$ 联系起来（可惜，模态类 $\overline{M}_1^{def}$ 和 $\overline{M}1$ 之间的联系不是那样简单。$\overline{M}_1^{def}$ 不是由所有那些在所有一般框架上等值于某个 L_0-语句的模态公式所组成的类。该类只由所有闭模态公式组成（参看引理 13.2））。

本章最后部分的结果都跟框架类的 $\Pi_1^1(R)$-可定义性有关。我们将给出这些框架类的语义刻画，由凯斯勒关于一阶可定义的框架类的结果得来，非常类似于由关于等式簇的柏克霍夫定理得到定理 16.4。什么样的框架类可以用我们二阶语言中的一组语句来定义，这一较为一般的问题最终被证明是容易回答的。因此，请读者跳过本章的以下部分，直到读过第 18 章的相关部分后再回过来，特别是定理 18.13 及其证明要先读。

最终将找到的结果具有这样的形式："一个框架类是由一组 $\Pi_1^1(R)$-语句定义的，当且仅当，它对……（适当的语义运算）封闭。"于是很容易明白，对于一个给定的框架类 $\mathbf{K}$，包含 $\mathbf{K}$ 的最小的 $\Pi_1^1(R)$ - 可定义框架类是 $MOD(Th_{\Pi_1^1(R)}(\mathbf{K}))$。这里 $Th_{\Pi_1^1(R)}(\mathbf{K})$ 是由所有那些在 $\mathbf{K}$ 中的所有框架中都为真的 $\Pi_1^1(R)$-语句所组成的集，并且对任意一个集 Σ，$MOD(\Sigma)$ 是由所有使 Σ 成立的结构所组成的类。其想法就是要查明 $MOD(Th_{\Pi_1^1(R)}(\mathbf{K}))$ 是否有某个合理的语义刻画。就一阶逻辑情形而言，存在有一个相关的结果。令 $Th_{univ}(\mathbf{K})$ 是由所有那些在 $\mathbf{K}$ 中的所有结构中都为真的全称一阶语句所组成的集。显然，$MOD(Th_{univ}(\mathbf{K}))$ 是包含 $\mathbf{K}$ 的最小的全称可定义框架类。现在，对于任意的类 $\mathbf{K}$，令 $I(\mathbf{K})$ 是由 $\mathbf{K}$ 中所有结构的同构象所组成的类，$S(\mathbf{K})$ 是由 $\mathbf{K}$ 中所有结构的子结构所组成的类,并令 $U(\mathbf{K})$ 是由 $\mathbf{K}$ 中所有结构的超积所组成的类。那么下述等式成立。

定理 17.15　$MOD(Th_{univ}(\mathbf{K})) = ISU(\mathbf{K})$。

证明： $\supseteq$ 部分由熟知的 U、S 和 I 的保持性而得。$\subseteq$ 部分由下述事实而得：$Th_{univ}(\mathbf{K})$ 的任意一个模型都可同构嵌入于 $\mathbf{K}$ 中成员的一个超积[17]。 ■

要能在这里找到一个类似的联系当然会令人高兴。比方说，若 $\mathbf{F} \models Th_{\Pi_1^1(R)}(\mathbf{K})$，则就某个适当定义的子结构及超积概念 S^* 和 U^* 而言，$\mathbf{F} \in IS^*U^*(\mathbf{K})$。$\mathbf{K}$ 上的一个闭包条件则基本上是"$\mathbf{F} \in IS^*U^*(\mathbf{K})$"的陈述中抽出来的。实际情形更复杂一些，但这仍然是主要想法。

考虑任意一个框架 **F** 使得 $\mathbf{F} \models Th_{\Pi_1^1(R)}$（**K**）。完全追随一阶逻辑中的证明过程（指 17.15 中的证明）就得到一个由结构 $\mathbf{F}_i \in \mathbf{K}$（$i \in I$）形成的多种类超积（参看第 18 章）$\mathbf{M} = \Pi_U \mathbf{F}_i$，使得各个在 **M** 中为真的 $\Pi_1^1(R)$-语句也在 **F** 中为真。为了弄清这一点，考虑 $\Sigma = \{\neg\varphi \mid \varphi$ 是使得 $\mathbf{F} \models \neg\varphi$ 成立的 $\Pi_1^1(R)$-语句$\}$。Σ 的各个有穷子集都有一个模型在 **K** 中。假定不是如此，那么，对某些 $\neg\varphi_1, \cdots, \neg\varphi_k \in \Sigma$，$\neg(\neg\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \neg\varphi_k)$（即 $\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_k$）将会在 **K** 中的所有结构中都为真。于是，由一个容易的量词处理可得，$\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_k$ 等值于单独一个 $\Pi_1^1(R)$-语句 φ；此外，φ 是在 $Th_{\Pi_1^1(R)}$（**K**）中的。这是一个矛盾，因为据假设可知这样的语句 φ 是在 **F** 中成立。类似于我们熟知的紧致性定理超积证明中的那样一个构造就可以产生所要求的多种类（！）超积 **M**。

实际上，如果 **M** 相对于 **F** 有所要求的性质，那么它的满超积也是如此。但是，在我们的论证过程中，多种类超积的应用无论如何都不可避免。

下一步是利用 **F** 和 **M** 作为构造初等链的出发点，这两条链将分别产生链极限 $\mathbf{F}_1$ 和 $\mathbf{M}_1$，使得 $\mathbf{F}_1$ 同构于 **M** 的一种适当的子结构［换句话说 $\mathbf{F}_1 \in S^*(\{\mathbf{M}_1\})$］。那么，由于 $\mathbf{F}(\mathbf{M})$ 和 $\mathbf{F}_1(\mathbf{M}_1)$ 是初等等价的，**F** 将是在 EIS^*EU_1（**K**）中的。这里，对任意一个多种类结构类 **K**，E(**K**) 是由所有初等等价于 **K** 中某个结构的结构所组成的类，而 U_1(**K**) 则是由所有 **K** 中结构形成的多种类超积所组成的类（参看第 18 章）。另一方面，一些更多的操作将表明，事实上 $\mathbf{F} \in ES^*U_1(\mathbf{K})$；由此可以萃取所要求的主要定理。

初等链构造过程中的某些技术上的困难使得有必要从 $\Pi_1^1(R)$-语句改变成由从多种类观点较易处理的语句所组成的一个集。这些种类是 S_0（个体）、S_1（一元谓词）、S_2…等等，如第 18 章中所作。

定义 17.16 一个 U-语句就是任意一个从原子公式及其否定利用 $\wedge$、$\vee$ 对种类 S_0（的变项）而言的 $\forall$、$\exists$ 以及对其他种类（的变项）而言的 $\forall$ 构造起来的多种类语句。

引理 17.17（AC） 对于任意一个 U-语句（看做二阶语句），存在一个 $\Pi_1^1(R)$-语句在由所有标准模型所组成的类上等值于它。

证明： 将这个 U-语句转化成一个前束范式。然后应用换位原则：

$\forall x \forall Y\varphi \leftrightarrow \forall Y \forall x\varphi$，

（AC） $\exists x \forall Y\varphi \leftrightarrow \forall Y' \exists x\varphi'$（参看第 18 章）

使所有不同于 S_0 的种类上的全称量词都移到前面。 ■

再次，考虑任意一个使得 $\mathbf{F} \models Th_{\Pi_1^1(R)}$(**K**) 成立的框架 **F**。据引理 17.17，也可假定 $\mathbf{F} \models Th_U$(**K**)。这里，Th_U(**K**) 是由所有在 **K** 中所有结构中都为真的

U-语句所组成的集。如前一样的论证就产生 $U_1(\mathbf{K})$ 中的一个结构 $\mathbf{M}$，使得各个在 $\mathbf{M}$ 中为真的 U-语句也在 $\mathbf{F}$ 中为真。现在，可以开始构造初等链。为了陈述相关的结果，有必要详细说明 S^* 在前面的（部分非正式的）讨论中意指什么。

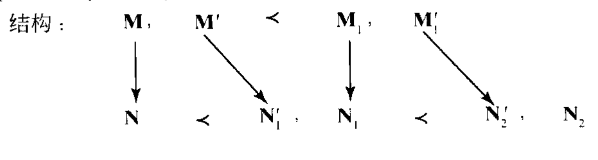
定义 17.18　多种类结构 $\mathbf{N}$ 的一个谓词子结构 $\mathbf{M}$（这一术语是为此特设的）就是 $\mathbf{N}$ 的一个有与 $\mathbf{N}$ 一样的个体域（即 S_0）的多种类子结构。对任意一个 $\mathbf{K}$，$S(\mathbf{K})$是由 $\mathbf{K}$ 中所有结构的谓词子结构所组成的类。

引理 17.19　如果在某个多种类结构 $\mathbf{M}$ 中为真的各个 U-语句也在多种类结构 $\mathbf{N}$ 中为真，那么存在 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{N}$ 的初等扩充（分别为）$\mathbf{M}^+$ 和 $\mathbf{N}^+$ 使得 $\mathbf{N}^+$ 同构于 $\mathbf{M}^+$ 的一个谓词子结构。

证明： 这个论证有点像第 15 章中所用的那个。出发点是满足 $\mathbf{M}-U(L)-\mathbf{N}$ 的、满足某个语言 L 的两个结构 $\mathbf{M}$，$\mathbf{N}$，即 L 中的在 $\mathbf{M}$ 中为真的各个 U-语句也在 $\mathbf{N}$ 中为真。那么，一步一步地将构造出一个"上"初等链 $\mathbf{M}$，$\mathbf{M}_1$，$\mathbf{M}_2$，…和一个"下"链 $\mathbf{N}$，$\mathbf{N}_1$，$\mathbf{N}_2$，…。第一步对于整个过程来说是典型的。

为 $\mathbf{M}$ 个体论域中的各个 w 都附加唯一一个新常项 $\mathbf{w}$ 到语言 L，最终得到语言 L'。通过使各个 $\mathbf{w}$ 解释为 w 将 $\mathbf{M}$ 膨胀成一个 L'-结构 $\mathbf{M}'$，于是 $\Sigma=\{\varphi \mid \varphi$ 是 L'中的一个在 $\mathbf{M}'$中为真的 U-语句$\}$ 的各个有穷子集都有一个为 $\mathbf{N}$ 的膨胀的模型。因为，令 φ_1，…，$\varphi_k\in\Sigma$，所含新常项（总计）为 $\mathbf{w}_1$，…，$\mathbf{w}_m$。那么，对于不在 φ_1，…，φ_k 中出现的、种类 S_0 的变项 x_1，…，x_m，$\mathbf{M}\models\exists x_1\cdots\exists x_m[x_1/\mathbf{w}_1,\cdots,x_m/\mathbf{w}_m](\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_k)$，从而 L 的这个 U-语句在 $\mathbf{N}$ 中成立。由此可知，Σ有一个模型 $\mathbf{N}'_1$ 为 $\mathbf{N}$ 的 L-初等扩充。注意，$\mathbf{M}'-U(L')-\mathbf{N}'_1$。

现在，为 $\mathbf{N}'_1$ 全部论域中的各个 w 附加一个新的个体常项 $\mathbf{w}$，最终得到一个语言 L_1。通过使各个 $\mathbf{w}$ 解释为 w 将 $\mathbf{N}'_1$ 膨胀成一个 L_1-结构 $\mathbf{N}_1$。$\Delta=\{\neg\varphi \mid \varphi$ 是 L_1 中的一个使得 $\mathbf{N}_1\models\neg\varphi$ 成立的 U-语句$\}$ 的各个有穷子集都有模型为 $\mathbf{M}'$的膨胀。因为，令$\neg\varphi_1$，…，$\neg\varphi_k\in\Delta$，所含新的（L_1-L'）-常项（总计）为 $\mathbf{w}_1$，…，$\mathbf{w}_m$。假定没有 $\mathbf{M}'$的膨胀满足$\neg\varphi_1\wedge\cdots\wedge\neg\varphi_k$。那么 L'中的 U-语句 $\forall x_1\cdots\forall x_m\ [x_1/\mathbf{w}_1,\cdots,x_m/\mathbf{w}_m]\ (\varphi_1\vee\cdots\vee\varphi_k)$ 在 $\mathbf{M}'$中成立，因而它必定在 $\mathbf{N}'_1$ 中成立，这是一个矛盾。由此可知，Δ 有一个模型 $\mathbf{M}_1$ 为 $\mathbf{M}'$的一个 L'初等扩充，并满足 $\mathbf{M}_1-U(L_1)-\mathbf{N}_1$，等等。



最后，考虑各自的链极限 $\mathbf{N}^+$ 和 $\mathbf{M}^+$。一个明显的同构使 $\mathbf{N}^+$ 嵌入于 $\mathbf{M}^+$。注

意，由集Σ的选取可知，这个同构只相对于 $\mathbf{M}^+$ 的个体论域是到上的。换句话说，$\mathbf{N}^+$ 同构于 $\mathbf{M}^+$ 的一个谓词子结构。 ■

引理 17.19 的证明方法较普遍地适用于有任意多个常项论域的情形，而不是只适用于仅有第一种类 S_0 的情形。当然，定义 17.16 必须做相应的调整。此外，很容易推广此证明，用来证明在谓词子结构下的保持和依靠 U-语句的可定义性二者是重合的。

把引理 17.19 应用到先前的 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{F}$ 就表明，$\mathbf{F}$ 的某个初等等价物 $\mathbf{F}^+$ 同构于 $U_1(\mathbf{K})$ 中某个结构 $\mathbf{M}$ 的一个初等等价 $\mathbf{M}^+$ 的某个谓词子结构。更简言之，$\mathbf{F} \in EIS^*EU_1(\mathbf{K})$。

可以做一个明显的简化。对任意一个类 $\mathbf{K}$，如果 $\mathbf{F} \in EI(\mathbf{K})$，那么 $\mathbf{F} \in E(\mathbf{K})$，从而 $\mathbf{F} \in ES^*EU_1(\mathbf{K})$。进一步的简化要求较多一点的思考。

引理 17.20 对任意框架类 $\mathbf{K}$，$ES^*EU_1(\mathbf{K}) \subseteq ES^*U_1(\mathbf{K})$。

证明： 令 $\mathbf{M} \subseteq ES^*EU_1(\mathbf{K})$，即存在 $\mathbf{M}$ 的一个初等等价 $\mathbf{M}_1$ 为某个 $\mathbf{M}_2$ 的一个谓词子结构，这个 $\mathbf{M}_2$（反过来）初等等价于 $\mathbf{K}$ 的中结构 $\mathbf{M}_i(i \in I)$ 的某个多种类超积 $\prod_U \mathbf{M}_i$。可以图示为

$$\mathbf{M} \equiv \mathbf{M}_1 \subseteq \mathbf{M}_2 \equiv \prod_U \mathbf{M}_i$$

于是，据引理 18.10 可知，$\mathbf{M}_2$ 和 $\prod_U \mathbf{M}_i$ 有同构的多种类超幂，设为 $\prod_V \mathbf{M}_2$ 和 $\prod_V \prod_U \mathbf{M}_i$。由引理 18.11 可知，后面的结构属于 $IU_1(\mathbf{K})$ 因而 $\prod_V \mathbf{M}_2$ 也属于 $IU_1(\mathbf{K})$。另外，下面的这个明显的换位原则成立：

如果就各个 $i \in I$ 而言 $\mathbf{M}_i$ 是 $\mathbf{N}_i$ 的一个谓词子结构，并且如果 U 是 I 上的一个超滤，那么多种类超积 $\prod_U \mathbf{M}_i$ 同构于多种类超积 $\prod_U \mathbf{N}_i$ 的一个谓词子结构（利用自然嵌入）。

所以，多种类超幂 $\prod_V \mathbf{M}_1$ 同构于 $\prod_V \mathbf{M}_2$ 的一个谓词子结构，因而属于 $IS^*IU_1(\mathbf{K})$。显然，对任意一个类 $\mathbf{K}$，$S^*I(\mathbf{K}) \subseteq IS^*(\mathbf{K})$，从而 $\prod_V \mathbf{M}_1$ 属于 $IIS^*U_1(\mathbf{K})$，即属于 $IS^*U_1(\mathbf{K})$。此外，$\mathbf{M}_1$ 初等等价于 $\prod_V \mathbf{M}_1$，这又蕴涵 $\mathbf{M} \in EEIS^*U_1(\mathbf{K})$，因为 $\mathbf{M}$ 初等等价于 $\mathbf{M}_1$。由此立即可以得到结论：$\mathbf{M} \in ES^*U_1(\mathbf{K})$。 ■

前面讨论的结果可以整理如下。

引理 17.21 如果 $\mathbf{K}$ 是一个框架类并且 $\mathbf{F}$ 是一个使得 $\mathbf{F} \models Th_{\Pi_1^1(R)}(\mathbf{K})$ 成立的框架，那么 $\mathbf{F} \in ES^*U_1(\mathbf{K})$。

换句话说，如果 $\mathbf{F}$ 属于 $MOD(Th_{\Pi_1^1(R)}(\mathbf{K}))$，那么 $\mathbf{F}$ 初等等价于 $\mathbf{K}$ 中结构 $\mathbf{F}_i$（$i \in I$）的一个多种类超积 $\prod_U \mathbf{F}_i$ 的某个谓词子结构 $\mathbf{M}$。据引理 18.10 还可知，$\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{M}$ 将有同构的多种类超幂 $\prod_V \mathbf{F}$ 和 $\prod_V \mathbf{M}$。利用上面的转换原则可得，$\prod_V \mathbf{M}$ 同构于超幂 $\prod_V \prod_U \mathbf{F}_i$ 的某个谓词子结构，这个子结构本身同构于 $\mathbf{K}$ 中框架 $\mathbf{G}_j$ 的

某个多种类超积$\prod_S \mathbf{G}_j$。用上面的符号表示就是，$\prod_V \mathbf{F} \in IIS^* U_1(\mathbf{K})$，或者（利用明显的简化）$\prod_V \mathbf{F} \in IS^* U_1(\mathbf{K})$。这是最终结果，余下要做的就是创造一个专门名词来描述它。

定义 17.22　$\mathbf{M}$ 为结构集 $\{\mathbf{M}_i \mid i \in I\}$ 的一个*多种类子超积*是指 $\mathbf{M}$ 为某个多种类超积$\prod_U \mathbf{M}_i$ 的一个谓词子结构（这里 U 是 I 上的一个超滤）。

回顾一下“超根”概念，参看定义 18.12。

定理 17.23　一个标准模型类 $\mathbf{K}$ 是由一个 $\Pi_1^1(R)$ -语句集定义的，当且仅当，它对这样的框架封闭：这些框架是 $\mathbf{K}$ 中框架集 $\{\mathbf{F}_i \mid i \in I\}$ 的多种类子超积的超根。

当然，这个定理纯粹是“为证明而给出的”（参看关于定理 16.4 所作的类似说明），但是得到它的论证仍旧具有某种独立的意义。

18 二阶逻辑

本章中的二阶语言同于第 17 章。差别在于，这里将要考虑的是全部语句，而不只是$\Pi_1^1(R)$-语句。关于这种逻辑所知的结果极少。这些结果中的大多数都是通过将一阶方法的能力发挥至极端而得到的——这仍不能使我们深入这一领域。二阶模型论迄今还有待发展，正如［17］中所注意的那样。本章并不妄求补救这一情形，本章只是作为从“模态公式”到“$\Pi_1^1(R)$-语句”到……这一系列推广的一种自然后果而附加进来的。

二阶逻辑最显著的特征是它异常依赖于关于由所有结构所组成的类所做的集论假设。例如，即使是证明诸如$\exists x\forall Y\varphi\leftrightarrow\forall Y'\exists x\varphi'$一类最简单的量词交换规则也需要有选择公理。这里，$x$是一个个体变项，$Y$是一个$n$元谓词变项，并且$Y'$是一个新的$n+1$元谓词变项，而$\varphi'$则是将$\varphi$中形如$Yz_1\cdots z_n$的子公式换成$Y'z_1\cdots z_n x$后所得的结果。这样的原则也为证明（前束）范式定理所必需，该定理的大意是说，任意一个二阶语句都等值于一个形如“二阶量词序列 - 一阶量词序列 - 无量词母式”的公式。

另一个例子是诸如$\forall x\exists yRxy\rightarrow\exists f\forall xRxfx$一类的斯科伦归约。

对比起来，一阶逻辑相对来说是不受这类问题影响的。可是，在这些附属于学位论文原文[5]的问题之一中，关于阿伯格的论文“集合论中的相对性现象”(Relativity Phenomema in Set Theory，*Synthese* 27，1974，189 ~ 198）有一个注记说，存在策梅罗 - 弗兰克尔集论的扩充理论，在此理论中可证明为普遍有效的L_0-语句要比L_0-逻辑真的语句多，但这仅仅是好奇而已。

就对形而上学感兴趣的读者而言，这里就是论证。下述当且仅当命题不能对于所有的L_0-语句α都成立：

$$\not\models\alpha\text{，当且仅当，}ZF\vdash\text{“}\exists\mathbf{FF}\not\models\alpha\text{”}\qquad(\bigstar)$$

因为，否则的话，由所有不普遍有效的L_0-语句所组成的集将是递归可枚举的。

然而，据波斯特定理可知，由所有普遍有效的 L_0-语句所组成的集将会是递归的，因为由完全性定理可知这个集是递归可枚举的。不过，这将矛盾于丘奇的定理。此刻，容易看出（★）有一半是正确的：如果 $ZF \vdash$ “$\exists \mathbf{F}\ \mathbf{F} \not\models \alpha$”，那么 $\not\models \alpha$。因为，如果 $\models \alpha$，则 $\vdash \alpha$，从而显然有 $ZF \vdash$ “$\forall \mathbf{F}\ \mathbf{F} \not\models \alpha$”；由一个直接的句法论证而得。由此可知，$ZF \nvdash$ “$\exists \mathbf{F}\ \mathbf{F} \not\models \alpha$”，恒假定 ZF 为协调的。

结论必定是说（★）的另一方向不成立。即有一个 L_0-语句 α 使得 $\not\models \alpha$，而且还有 $ZF \nvdash$ “$\exists \mathbf{F}\ \mathbf{F} \not\models \alpha$”；或者，等价地说，使得 $ZF \cup$ {“$\forall \mathbf{F} \mathbf{F} \models \alpha$”} 为协调的。后面这个理论会是 ZF 的一个加进“逻辑真句子”α 后的扩充，但实际上 $\not\models \alpha$。

注意，下述等值命题对于所有的 L_0-语句 α 都成立：

$$\models \alpha\text{，当且仅当，}ZF \vdash \text{“}\forall \mathbf{F}\ \mathbf{F} \models \alpha\text{”}$$

而且，通常的 ZF 扩充并不增大 L_0-逻辑真句子的总量。例如，如果 ZFL（$= ZF$ 加可构造性公理）$\vdash$ “$\forall \mathbf{F} \mathbf{F} \models \alpha$”，那么据 L_0 的完全性定理（这在 ZF 内就已经可用）可知，$ZFL \vdash$ “α 是 L_0-可证的”。但是，后面这个断言是算术的，因而（由相对于算术陈述在 ZF 之上是保守的可得）$ZF \vdash$ “α 是 L_0-可证的”。那么，再次利用 ZF 中的完全性定理就得到 $ZF \vdash$ “$\forall \mathbf{F}\ \mathbf{F} \models \alpha$”。

在上面的离题讨论之后我们回到较普通的话题。

标准模型仍是原来的框架。但是，我们现在将考虑较复杂的一般模型，它们的谓词集都对由下述定义表述出来的、较广泛的要求封闭。

定义 18.1　一个一般模型 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle$ 由一个框架 $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{F}$ 上的一个谓词集 $\mathbf{W}$ 组成，使得对于所有的二阶公式 $\varphi = \varphi(X_1, \cdots, X_k, y_1, \cdots, y_m, z_1, \cdots, z_n)$、$\mathbf{W}$ 中的所有谓词 $S_1, \cdots, S_k$［使得若 X_i 是 j 元的则 S_i 亦是 j 元的（$1 \leqslant i \leqslant k$）］以及 W 中的所有元素 $w_1, \cdots, w_m$ 而言，下述谓词属于 $\mathbf{W}$：

$$\{\langle v_1, \cdots, v_n \rangle \mid v_1, \cdots, v_n \in W\text{，且}\ \langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle \models \varphi\,[S_1, \cdots, S_k; w_1, \cdots, w_m; v_1, \cdots, v_n]\}$$

当然，这个闭包条件是高度地非直谓的，其中的 φ 也许含有某些在 $\mathbf{W}$ 上取值的量词。任意一个框架都可被视同于一般模型 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle$，这里 $\mathbf{W}$ 由 $\mathbf{F}$ 上的所有谓词组成。正如在第 17 章中那样，对于一个给定的框架 $\mathbf{F}$ 总存在有一个最小的一般模型 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{W} \rangle$（取交即可）；但是（跟第 17 章中不一样的地方在于）无法为这样一个最小的模型建立任何一个简单的构造性概念。一般模型的用处就在于它们为一个很自然的二阶演绎系统提供了一个完全的语义[33]。

另一方面，框架上的普遍有效性在二阶逻辑中成为一个很有意义的概念。正如推论 13.1 中所述，由所有普遍有效的模态公式所组成的集是递归的。第 17 章

中的注记说，由所有普遍有效的$\Pi_1^1(R)$-语句所组成的集是递归可枚举的（不过它不是递归的）。如果除等词外不允许任何一阶参变项，那么所有普遍有效的$\Sigma_1^1(R)$-语句所组成的集是Π_1^0-可定义的，正如在定理 17.11 的证明之中所显示的那样。但是，普遍有效性在句法谱系的下一层次上却成为超算术的。为了看出这一点，回顾一下第 1 章中提到的杜茨的结果：甚至有穷类型论（参看第 19 章）中的普遍有效性都可归约到形如$\forall R \exists P\varphi(R, P)$的二阶语句的普遍有效性，这里，$R$是一个二元谓词变项，$P$是一个一元谓词变项，并且$\varphi$是用$R$和$P$表达的一个一阶语句。称形如“全称二阶量词 - 特称二阶量词 - 一阶语句”的二阶语句为Π_2^1-语句。如果这个二阶量词前缀颠倒过来，则称这些语句为Σ_2^1-语句，只要不出现任何一阶谓词常项就可（与有效性有关，这些语句导致语句前面额外的全称二阶量词）。

两个简单的例子表明这样的语句是何等的复杂。

引理 18.2 在所有标准模型中都为真的所有Π_2^1-语句所组成的集不是算术可定义的。在所有标准模型中都为真的所有Σ_2^1-语句所组成的集不是算术可定义的。

证明： 一个使算术语句译成这一类二阶语句的适当的翻译将证明这两个断定，用塔尔斯基的不可定义性定理就可以得到。现在将勾勒相关的论证。

首先，令PA^2是公理化二阶皮亚诺算术的全称二阶语句（带一阶参变项 0，S，+，·）。PA^2在不计同构的意义下定义标准模型〈IN，0，S，+，·〉。可以把它写成$\forall X\varphi \wedge \beta$，这里$\forall X\varphi$是二阶归纳公理而$\beta$则是其余（一阶）公理的合取。

对任意一个算术（一阶）语句γ，下述成立：

(i)〈IN，0，S，+，·〉$\models \gamma$，当且仅当，$\forall 0 \forall S \forall + \forall \cdot\ (PA^2 \rightarrow \gamma)$在所有标准模型中都为真。于是，后面的语句等值于$\forall 0 \forall S \forall + \forall \cdot \exists X\ (\varphi \wedge \beta \rightarrow \gamma)$。第一个量词$\forall 0$可以跟$\forall S$、$\forall +$和$\forall \cdot$交换，也可以跟$\exists X$交换；因为有归约原则

$$\forall x \exists Y\varphi \leftrightarrow \exists Y' \forall x\varphi'$$

它是本章开始时提到的那个原则的对偶。结果是这个当且仅当命题右侧的一个Π_2^1-语句（当然，函项量词必须换成适当的谓词量词：但是，这些都是不足道的）。

证明本引理第二个断言所需要的等价命题是

(ii)〈IN，0，S，+，·〉$\models \gamma$，当且仅当，$\exists f$（f是从其个体域到其个体域的一个一一而非到上的函数）$\rightarrow \exists N \exists 0 \exists S \exists + \exists \cdot \exists x((PA^2)^N \wedge (\gamma)^N)$在

所有标准模型中都为真［这里 N 是一个一元谓词变项，$(PA^2)^N$ 和 $(\gamma)^N$ 都显然是相对化］。

右侧的公式的后承语句等值于一个 Σ_2^1-语句，通过类似于上面的考虑而得。因此，整个语句等值于一个 Σ_2^1-语句，利用依据于模式 $\exists\to\exists\forall$、$\exists(\exists\to\forall)$、$\exists\forall(\exists\to-)$、$\exists\forall\forall(-\to-)$ 的量词交换而得。■

这里将不给出任何演绎系统。根据下述说明，只需眼前的语言固定任意一个合理的可推导性概念 $\vdash$，使它相对于上述一般模型类为完全的就可。结果是，这个“完全性”概念——在定义 6.4 的意义下——在这里没有任何有意义的推广。无疑，我们可以定义一个类似的概念。

定义 18.3 一个二阶语句 φ 为完全的，是指对于所有的二阶语句 ψ，$\varphi\models\psi$（即 $\varphi\to\psi$ 在所有标准模型中为真），当且仅当，$\varphi\vdash\psi$。

但是，这一概念被证明太强。令 UV 是由在所有标准模型中都为真的二阶语句所组成的集。

引理 18.4 一个二阶语句 φ 是完全的，当且仅当，$\varphi\vdash UV$。

证明： 若 φ 是完全的，则对任意一个 $\psi\in UV$，$\varphi\vdash\psi$，因为 $\varphi\models\psi$。另一方面，如果 $\varphi\vdash UV$，而且如果还有 $\varphi\models\psi$（即 $\varphi\to\psi\in UV$），那么 $\varphi\vdash\varphi\to\psi$，从而 $\varphi\vdash\psi$。此外，选取 $\vdash$ 是为了保证，若 $\varphi\vdash\psi$，则 $\varphi\models\psi$。那么，由此可知 φ 是完全的。■

同样，有两个一阶可定义性概念，一个是依据标准模型给出，另一个则依据一般模型给出。

定义 18.5 $SO1$ 是由二阶语句 φ 所组成的集，对于这样的 φ，存在一个 L_0-语句 α 使得 $\varphi\leftrightarrow\alpha$ 在所有标准模型中都为真（参看定义 17.6）。

$GSO1$ 是由二阶语句 φ 所组成的集，对于这样的 φ，存在一个 L_0-语句 α 使得 $\varphi\leftrightarrow\alpha$ 在所有一般模型中都为真（参看定理 17.14）。

显然，$GSO1\subseteq SO1$，但反过来不成立。此外，$GSO1$ 是递归可枚举的，因为在所有一般模型中都为真这是一个递归可公理化的概念（参看前面的说明，或者[33]）。

有若干方法可以用来得到 $SO1$ 的一个语义刻画。第一种方法利用跟初等类有关的凯斯勒定理。

定理 18.6 一个二阶语句 φ 是在 $SO1$ 中的，当且仅当，φ 和 $\neg\varphi$ 二者都对超积保持。

第二种方法照抄定理 17.9 的证明。

定理 18.7 一个二阶语句 φ 是在 $SO1$ 中的，当且仅当，φ 和 $\neg\varphi$ 二者都对从

使 UV 在其中成立的一般模型到它的基础标准模型的过渡保持。

第三种方法是使用林斯特龙定理依据紧致性和骆文汉姆 - 斯科伦性质来刻画一阶逻辑。令 $L1(\varphi)$ 是这样的一阶逻辑：它由至少带有无穷多个二元谓词常项的通常的一阶逻辑加上以 φ 为一个额外的命题常项组成，对布尔算子封闭，但允许关于一元谓词的相对化。

我们必须当心一点：只对 L_0 附加 φ 不起作用。一方面，林斯特龙的证明并不适用于仅有有穷词汇的一阶逻辑；另一方面，林斯特龙定理在这种情形下甚至都不成立（这是另一个附加进原来的学位论文[5]中的论题）。例如，令 φ 定义满足 $\forall x \forall y Rxy$ 的可数无穷框架。φ 在 L_0 中不是可定义的，即由 L_0 通过加进 φ 然后对布尔算子封闭而得到的语言是它的一个真扩充。可是它既满足紧致性又满足骆文汉姆 - 斯科伦性质：正如容易验证的那样 [有关这个问题以及来自本章的相关论题的更多信息都可在由杜茨与本作者合写的《哲学逻辑手册》（第一卷）“高阶逻辑”一章中找到]。

尽管如此，还是可以阐述下述结果。

定理 18.8 一个二阶语句 φ 在 $SO1$ 中，当且仅当，$L1(\varphi)$（在 φ 的正规语义解释下）满足紧致性和骆文汉姆 - 斯科伦性质。

还有其他方法可用。例如，可以利用弗雷斯定理。

$GSO1$ 的语义刻画可以由定理 18.7 给出的 $SO1$ 的语义刻画推出。证明完全类同于定理 17.14 的证明。

定理 18.9 一个二阶语句 φ 在 $GSO1$ 中，当且仅当，φ 和 $\neg\varphi$ 二者都对从一般模型到其基础标准模型的过渡保持。

这个定理回答了奥雷（S. Orey）在 [62] 中提出的一个问题。

最后，可定义性问题将得到处理，像第 16 章的那些问题一样。主要问题是，一个标准模型类什么时候是用一个二阶语句集可定义的。将通过应用初等链的凯斯勒刻画来得到某种答案。

首先，考虑通常一阶逻辑的情形。令 $\mathbf{K}$ 是任意一个结构类，定义 $Th(\mathbf{K})$ 为 $\{\varphi \mid \varphi$ 是一个在 $\mathbf{K}$ 所有的结构中都为真的一阶语句$\}$。容易看出，包含 $\mathbf{K}$ 的最小的 Δ-初等类是 $MOD(Th(\mathbf{K}))$，这里 $MOD(\Sigma) =_{def}$ 由所有使 Σ 在其中成立的结构所组成的类。于是，一个熟知的模型论论证就将这个类语义地刻画成 $IE_sU(\mathbf{K})$。这里，对任意一个结构类 $\mathbf{K}$：

$I(\mathbf{K})$ 是由 $\mathbf{K}$ 中所有结构的同构象所组成的类；

$E_s(\mathbf{K})$ 是由 $\mathbf{K}$ 中所有结构的初等子结构所组成的类；

$U(\mathbf{K})$ 是由 $\mathbf{K}$ 所有子集的超积所组成的类。

[要点就在于，任意一个使 $Th(\mathbf{K})$ 在其中成立的结构同构于 $\mathbf{K}$ 中结构的某个超

积的一个初等子结构］。这一结果对任意一个多种类语言都成立[20]；其中这样的语言具有不同种类的个体变项，这些变项的值域是结构中不同种类的论域。

现在，可以以一种明显的方式把我们的二阶语言看成是一个多种类语言（参看[20]或 J. D. Monk，*Mathematical Logic*，Springer，Berlin，1975）。将会有种类 S_0（用于个体）、S_1（用于一元谓词）、S_2（用于二元谓词）、…等。在结构〈**F**，**W**〉中，S_0 指 W，S_1 指 **W** 中一元谓词，……等等。但是，这个多种类语言还有许多其他结构拥有任意的不同种类论域。“正规化”这样的结构有多种办法，通过要求某些外延性原理成立而得。例如，令 E 是 S_0 的对象和 S_1 的对象之间的一个二元谓词。在使 $\forall x_1 \forall x_1'(\forall x_0(Ex_0x_1 \leftrightarrow Ex_0x_1') \rightarrow x_1 = x_1')$ 成立的结构中，S_1 中的对象 s 可被视同于 $\{w \in S_0 \mid E(w, s)\}$。此外，我们还可要求内涵原则的一个多种类说法成立，以便保证跟一般模型有一个如定义 18.1 中那样定义的较好的对应。

多种类超积可以按一种直截了当的方式定义出来。当以上述方式将一般模型看做多种类结构时，定理 17.9 证明中定义的超积就成为这种多种类超积。它已经被“正规化”而回到一般模型。

对一个多种类结构类 **K**，令 $U_1(\mathbf{K})$ 是由 **K** 中所有结构的多种类超积所组成的类。要得到下面的主要结果，只需考虑这个概念以及 $E(\mathbf{K})$ 这一概念，定义为由所有能（在多种类意义下）初等等价于 **K** 中某个结构的结构所组成的类。代替上述等式的，必定是下述这个较简单的陈述：

包含所给多种类结构类 **K** 的最小 Δ-初等类是 $EU_1(\mathbf{K})$。

这一陈述的证明用到这样的事实：任意一个使 **K** 的多种类理论在其中成立的结构初等等价于 **K** 中成员的某个（多种类）超积。

那么，我们寻求的结果具有这样的形式：“一个框架类是由一个二阶语句集定义的，当且仅当，它对……（适当的语义运算）封闭。”这些运算可以用框架表达出来，不过我们允许自己对辅助结构的论域说些题外话：就像我们定理 16.4 的证明中所做的那样。

如果类 **K** 完全由任意一个二阶语句集定义，那么它也由它自己的多种类理论 $Th_2(\mathbf{K})$ 定义。显然 $\mathbf{K} \subseteq FR(Th_2(\mathbf{K}))$，所以主要问题是要保证 $FR(Th_2(\mathbf{K})) \subseteq \mathbf{K}$。

现在，令 $\mathbf{F} \models Th_2(\mathbf{K})$。要找的是 **F** 和 **K** 中结构之间的一个联系，这个联系要能被翻译成一个如上所要求的闭包条件。为了找出一个联系，这些结构将被看做是多种类结构，并且 $Th_2(\mathbf{K})$ 被看做是 **K** 的多种类理论。那么上述等式变成适用的：$\mathbf{F} \in EU_1(\mathbf{K})$（我们不提供新记号来强调观点上的改变，以免解说过繁）。

概念 E 是相当不自然的，它极其依赖于所用的语言。幸好，有一种方法摆脱这种依赖，通过使用熟知的、断定任两个初等等价的结构有同构的超幂的凯斯勒定理而得。当然，必须验证这个定理是否也适用于多种类逻辑。

引理 18.10 如果两个多种类结构有相同的多种类理论，那么它们有同构的多种类超幂。

证明： 弄清这一点的一个办法就是推广凯斯勒的证明。一种较为容易一点的方法是找出一种办法直接应用原来单种类的结果。于是，如果该语言只有有穷多个种类 S_1，…，S_k，那么容易办到。令 $\mathbf{M}_1$，$\mathbf{M}_2$ 是任意两个初等等价的多种类结构。通过附加一元谓词常项 S_1，…，S_k 将这个语言转换成一个单种类语言。然后就可以将多种类公式转写成新语言中的公式；实质上就是将取值于第 i 个种类上的量词 $\forall x_i$ 换成 $\forall x(S_ix\rightarrow$ $(1\leqslant i\leqslant k)$。精确的过程在普通教科书中都有。类似地，可以将 $\mathbf{M}_1$，$\mathbf{M}_2$ 膨胀为这个新的多种类语言的结构 $\mathbf{M}_1^1$，$\mathbf{M}_2^1$。如果 $\mathbf{M}_1^1$ 和 $\mathbf{M}_2^1$ 能被证明为是在通常意义下初等等价的，那么凯斯勒原来的定理就可适用，因而 $\mathbf{M}_1^1$ 和 $\mathbf{M}_2^1$ 有同构的超幂，由此可以容易地提取 $\mathbf{M}_1$ 和 $\mathbf{M}_2$ 的同构的多种类超幂。

为了弄清 $\mathbf{M}_1^1$ 和 $\mathbf{M}_2^1$ 是初等等价的，考虑这样的理论 $\mathbf{T}$：它由 $\mathbf{M}_1$（和 $\mathbf{M}_2$）的多种类理论的单种类转写和下述三个原则组成：

(i) $\forall x(S_1x\vee\cdots\vee S_kx)$

(ii) $\forall x(S_ix\rightarrow\neg S_jx)$，$(1\leqslant i\neq j\leqslant k)$

(iii) $\forall x_1\cdots\forall x_m(Px_1\cdots x_m\rightarrow S_{n_1}x_1\wedge\cdots\wedge S_{n_m}x_1)$；对于其“种类”为 $\langle n_1,\cdots,n_m\rangle$ 的谓词 P 而言。

对于任意一个单种类语句 φ，存在一个单种类语句 φ^*，它是一个多种类语句的转写，使得 $\mathbf{T}\models\varphi\leftrightarrow\varphi^*$。由此，立即可以得到上述断言，利用 $\mathbf{M}_1$ 和 $\mathbf{M}_2$ 是在多种类意义下初等等价的事实而得。

φ^* 是从 φ 通过简单地使量词相对化而得到的。例如，$\forall x\psi(x)$ 相对化为 $\forall x(S_1x\rightarrow\psi)\wedge\cdots\wedge\forall x(S_kx\rightarrow\psi)$。

如果该语言有无穷多个种类 S_1，S_2，…，那么 φ^* 的构造就变得较为复杂。下面就是原理。

(i) 将 φ 改写成一个仅涉及初始逻辑符号 =、¬、→和 ∀ 的等值语句。约束变项改名以便保证任意两个量词都没有相同的约束变项。令 S_1，…，S_k 为全部这样的种类常项：或是出现在 φ 中，或是对应于一个在 φ 中出现的谓词常项的种类类型的种类。

(ii) 从外部开始，形如 $\forall x\alpha$ 的子公式换成

$$\prod_{i=1}^{k} \forall x(S_i x \to \alpha) \wedge \forall x(\prod_{i=1}^{k} \neg S_i x \to \alpha)$$

“$\prod_{i=1}^{k} \neg S_i x$”缩写成“$S_c x$”。另外，所有约束变项都必须是不相同的，使得有可能依据其量词的种类相对化来定义一个约束变项的种类。

（iii）逐个考虑所有原子子公式。若 $\alpha = S_i x$ 且 x 的种类不同于 S_i，则 α 换成恒假⊥。若 $\alpha = Px_1 \cdots x_m$，并且任意一个 x_i（$1 \leqslant i \leqslant m$）有一个不同于它依据 P 的种类类型 $\langle n_1, \cdots, n_m \rangle$ 而应当有的种类的种类，则 α 还是换成⊥。最后，若 α 是 $x_1 = x_2$，并且 x_1，x_2 有不相同的种类，则 α 换成⊥。这些替换产生一个（在 **T**）中等值于原来那个公式的公式；在此公式中形如 $\forall x$（$S_c x \to$ 的量词只约束出现在形如 $x = y$ 或 $y = x$ 的原子子公式中的变项；这里 x 和 y 二者有同样的种类 S_c。

（iv）公式归纳表明，任意一个步骤（iii）中所得到的那种公式都等值于由这样的公式组成的一个布尔组合：没有 S_c 出现的公式和只含形如 $\forall x$（$S_c x \to$ 的量词及形如 $x = y$ 或⊥的原子子公式的公式。由此可知，原来的公式（在 **T** 中）等值于那些跟 S_c 有关的多种类语句及等词语句转写而成的语句形成的一个布尔组合。后面的语句在 **T** 的基础上有确定的真值，因此可以按明显的方式予以删除。这样就产生所要求的语句 φ^*。■

回想一下，**F** 是在 EU_1(**K**) 中的。比如说，它初等等价于 **K** 中成员 $\mathbf{F}_i$（$i \in I$）的一个多种类超积 $\Pi_U \mathbf{F}_i$。据引理 18.10 可知，存在一个集 J 和 J 上的一个超滤 V 使得 $\Pi_V \mathbf{F}$ 同构于 $\Pi_V \Pi_U \mathbf{F}_i$。于是对后一结构还可以稍微简化。

引理 18.11　对任意一个多种类结构类 **K**，$U_1 U_1$(**K**) $\subseteq IU_1$(**K**)。

证明： 令 $\mathbf{F}_j = \Pi_{U_j} \mathbf{F}_{ij}$（$i \in I_j$；$j \in J$）都是 **K** 中结构形成的多种类超积。令 V 是 J 上的超滤。以某种方式使集 I_j 互不相交，得到同构于原来超积 $\mathbf{F}_j$ 的超积 $\mathbf{F}_j'$。接着，通过规定 $X \in V^*$，当且仅当，$\{j \in J \mid X \cap I_j \in U_j\} \in V$ 而在 $\bigcup_{j \in J} I_j$ 上定义一个新超滤 V^*。超积 $\Pi_V \mathbf{F}'_{ij}$ 经过那个明显的映射而同构于 $\Pi_V \Pi_{U_j} \mathbf{F}_{ij}$。■

实际上，这个结果也对普通的超积成立——利用同样的论证而得。

由引理 18.11 可以知道，上述超积 $\Pi_V \mathbf{F}$ 同构于 **K** 中结构 $\mathbf{F}_i$ 形成的某个多种类超积 $\Pi_U \mathbf{F}_i$。余下要做的就是使这个结果表述得更为简明一点。

定义 18.12　一个多种类结构 $\mathbf{M}_1$ 为结构 $\mathbf{M}_2$ 的超根，是指 $\mathbf{M}_2$ 同构于 $\mathbf{M}_1$ 的一个多种类超幂。一个多种类结构 $\mathbf{M}_1$ 为由这种结构所组成的集 $\{\mathbf{M}_i \mid i \in I\}$ 的一个超平均，是指它为该集的某个多种类超积的一个超根。

算术上的相似性将是清楚的。上述一连串的推理现在统一概括为：

定理 18.13　一个标准模型类是由一个二阶语句集定义的，当且仅当，它对下述框架封闭：这些框架都是这个标准模型类的成员组成的集的超平均。

也许有可能通过代数方法利用塔尔斯基学派的柱代数（和某个适当的柏克霍夫型结果）来得到类似于定理 18.13 的结果。但是——由于所涉及的技术困难——这个问题在这里并没有得到探索。

19 有穷类型论

这一章可以看成是对第17章中就开始了的一系列推广的一种逻辑结论。它仅仅是一个附录，最低限度地概述了罗素对二阶逻辑（或者实际上就是高阶逻辑）所做的精致的推广。从多种观点来看，有穷类型论 L_ω 是一个很自然的逻辑系统。不过，它提出的技术困难是相当难对付的。

定义 19.1 全部类型所组成的集就是包含基本类型 e（指“实体”）和 t（指“真值”）并对序组构造封闭的最小集。

语言 L_ω 有无穷多个变项和多种类型的常项。它的项是递归定义的。

定义 19.2 由所有类型 a 的项所组成的集 $TERM_a$ 是依据下列条款定义的：对于所有的类型 a 和 b，

(i) 类型 a 的变项和常项都属于 $TERM_a$

(ii) 若 $\alpha \in TERM_{\langle a, b\rangle}$ 且 $\beta \in TERM_a$，则 $\alpha(\beta) \in TERM_b$（函项应用）

(iii) 若 $\alpha \in TERM_b$ 且 x 是一个类型 a 的变项，则 $\lambda x \cdot \alpha \in TERM_{\langle a, b\rangle}$（λ-抽象）

(iv) 若 α，$\beta \in TERM_a$，则 $(\alpha = \beta) \in TERM_t$（恒等）

因此，L_ω 只有三个初始逻辑符，它们的意义将由下述语义确定。

定义 19.3 一个非空的（个体）论域 D_e 上的一个标准模型 **M** 由 D_e 和一个解释 I 组成，I 将类型 a 的常项解释成 D_a 中的元素；这里 D_a 的递归定义如下：

(i) D_e 是给定的

(ii) D_t 是真值集 $\{0, 1\}$

(iii) $D_{\langle a, b\rangle}$ 是 $D_b^{D_a}$，即由所有以 D_a 为定义域、取值于 D_b 中的函项所组成的集。

注意，D_e 和 I 完全决定标准模型。真值（更精确地说指称）的标准定义如下。

定义 19.4 令 f 是一个函项，它（至少）为每一个在项 α 中自由出现的变项

指定一个值，使得对于类型 a 的变项 x 而言所指定的值 $f(x)$ 是在 D_a 中的。在 f 下 α 在 $\mathbf{M}$ 中的值——记为 $V_{\mathbf{M}}(\alpha, f)$——的递归定义如下：

(i) 对变项 α 来说，$V_{\mathbf{M}}(\alpha, f) = f(\alpha)$

(ii) 对常项 α 来说，$V_{\mathbf{M}}(\alpha, f) = I(\alpha)$

(iii) $V_{\mathbf{M}}(\alpha(\beta), f) = V_{\mathbf{M}}(\alpha, f)(V_{\mathbf{M}}(\beta, f))$

(iv) 对于类型 a 的变项和类型 b 的项 α，$V_{\mathbf{M}}(\lambda x.\alpha, f)$ 是这样一个 D_a 到 D_b 中的那个函项：它为各个 $w \in D_a$ 指定值 $V_{\mathbf{M}}(\alpha, f_w^x)$；这里 f_w^x 是除了为 x 指定 w 外其余都跟 f 一样的函项；

(v) 当 $V_{\mathbf{M}}(\alpha, f) = V_{\mathbf{M}}(\beta, f)$ 时，$V_{\mathbf{M}}(\alpha = \beta, f) = 1$；否则，为0。

亨金做出的一系列巧妙的定义表明，其他常用的逻辑常项都可用上述三个逻辑常项定义出来。

同样，还有一般模型。

定义 19.5 一个一般模型 $\mathbf{M}$ 由一族非空集 D_a（对各个类型 a 各有一个）组成；这里 D_e 和 D_t 是上面给定的并且 $D_{\langle a, b\rangle} \subseteq D_b^{D_a}$；同时有一个如前的解释 I。此外，下述条件成立。对类型 a 的各个项 α（当对一个合适的函项 f 像在定义19.14 中那样计算时），$V_{\mathbf{M}}(\alpha, f)$ 属于 D_a。

注意，定义 19.5 是高度地非直谓的。也可参看定义 18.1。

看待标准模型的超积的方式有两种。一种方式在于考虑论域 D_e，取常用的一阶超积，然后察看相应的标准模型。另一种方式是按下述方式推广前几章中的多种类超积构造。

令对各个 $i \in I$ 而言给定了一般模型 $\mathbf{M}^i$；也给定 I 上的某个超滤 U。一般超积 $\mathbf{M} = \Pi_U \mathbf{M}^i$ 的定义如下。

所有的集 D_a 都将是形如 $\{\bar{f} \mid f$ 是以 I 为定义域而在 i 处的值属于 $D_a^i(i \in I)$ 的函项$\}$。马上要定义的映射-满足下述断言：

“对于所有的类型 a，若 f 和 g 是从 I 到 $\bigcup_{i \in I} D_a^i$ 中的函项，在 i 处的值属于 D_a^i $(i \in I)$，则 $\bar{f} = \bar{g}$，当且仅当，$\{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in U$。”

(i) D_e: $\bar{f} = \{g \mid g$ 是以 I 为定义域、i 处的值属于 D_e^i 的函项，并且 $\{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in U\}$

这是常用的超积构造，那个断言显然得到满足。

(ii) D_t:

$$\bar{f} = \begin{cases} 1, & \text{当 } \{i \in I \mid f(i) = 1\} \in U \text{ 时;} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

容易看出，那个断言此时也成立。

(iii) $D_{\langle a,b\rangle}$:假定 D_a 和 D_b 已经定义并满足那个断言。令 f 是任意一个以 I 为定义域、i 处的值属于 $D^i_{\langle a,b\rangle}$ 的函项。从 D_a 到 D_b 中的函项 $\bar{f}$ 定义为:对 $\bar{g}\in D_a$,设 $\bar{f}(\bar{g})=\overline{\lambda i.f(i)(g(i))}$(这里 $f(i)(g(i))\in D_b$)。

－是良定义的。因为,假定 $\bar{g}_1=\bar{g}$。则据关于 D_a 的归纳假设可知,$\{i\in I\mid g_1(i)=g(i)\}\in U$;因而据关于 D_b 的归纳假设可知,$\overline{\lambda i.f(i)(g_1(i))}=\overline{\lambda i.f(i)(g_1(i))}$;即 $\bar{f}(\bar{g})=\bar{f}(\bar{g}_1)$。

现在就这一新情形考虑那个断言。要证明的是 $\bar{f}=\bar{f}_1$,当且仅当,$\{i\in I\mid f(i)=f_1(i)\}\in U$。首先,假定 $\bar{f}=\bar{f}_1$。这意味着,对于所有的 $\bar{g}\in D_a$,$\bar{f}(\bar{g})=\bar{f}_1(\bar{g})$,或者 $\overline{\lambda i.f(i)(g_1(i))}=\overline{\lambda i.f_1(i)(g_1(i))}$,即据关于 D_b 的归纳假设,$\{i\in I\mid f(i)(g(i))=f_1(i)(g(i))\}\in U$。于是,假定 $\{i\in I\mid f(i)=f_1(i)\}\notin U$。那么 $\{i\in I\mid f(i)\neq f_1(i)\}\in U$ 且(每当可能时)可以在 D^i_a 中选取 x_i 使得 $f(i)(x_i)\neq f_1(i)(x_i)$,而在所有其他索引(indices)中 x_i 可以任意取。由于假定有 $\bar{f}=\bar{f}_1$,故而 $\bar{f}(\overline{\lambda i.x_i})=\bar{f}_1(\overline{\lambda i.x_i})$ 一定成立,并且由上面的结论可知 $\{i\in I\mid f(i)(x_i)=f_1(i)(x_i)\}\in U$,这跟 $\langle x_i\rangle_{i\in I}$ 的定义矛盾。余下要证的是相反方向的结论。

假定 $\{i\in I\mid f(i)=f_1(i)\}\in U$。那么,对任意的 $\bar{g}\in D_a$,$\bar{f}(\bar{g})=\overline{\lambda i.f(i)(g(i))}=\overline{\lambda i.f_1(i)(g(i))}$(据关于 D_b 的归纳假设)$=\bar{f}_1(\bar{g})$。

最后,对常项 c 设 $\mathbf{I}(c)=\overline{\lambda i.I^i(c)}$。这就完成了 $\mathbf{M}$ 的构造。

沃斯定理现在可以按如下方式来证明。

定理 19.6　对于上述描述的集 $\{\mathbf{M}^i\mid i\in I\}$ 的任意一个一阶超积 $\mathbf{M}$,任意一个项 α 以及任意一个(至少对 α 中自由变项有定义的)指派 f,

$$V_{\mathbf{M}}(\alpha,f)=\overline{\lambda i.V_M(\alpha,f_i)}$$

这里,若 f 为 x 指定 $\bar{g}$ 则 f_i 为 x 指定 $g(i)$。

应用 α 结构上的标准归纳法证明定理 19.6,通过使用关于变项的可代入性采取几个预防措施。一个重要的结论是紧致性定理。

定理 19.7　对于任意一个由类型 α 的项所组成的集 T,如果它满足对于所有的有穷的 $T_0\subseteq T$,存在 $\mathbf{M}$ 与 f 使得对于所有的 α,$\alpha'\in T_0$,$V_{\mathbf{M}}(\alpha',f)=V_{\mathbf{M}}(\alpha',f)$,那么,也存在 $\mathbf{M}$ 与 f 使得对于所有的 α,$\alpha'\in T$,$V_{\mathbf{M}}(\alpha',f)=V_{\mathbf{M}}(\alpha',f)$。

证明: 为每一个有穷的 $T_0\subseteq T$ 选定如所描述的 $\mathbf{M}$ 与 f;比方说为 $\mathbf{M}_{T_0}$,f_{T_0}。任取由 T 所有有穷子集所组成的集上的一个超滤 U,使之包含所有形如 $\{X\subseteq T\mid X$ 有穷且 $X\supseteq T_0\}$,并考虑 $\mathbf{M}=\Pi_U\mathbf{M}_{T_0}$ 以及那个明显的 f。若 α,$\alpha'\in T$,则 $V_{\mathbf{M}}(\alpha,f)=\overline{\lambda T_0.V_{M_{T_0}}(\alpha,f_{T_0})}$(据定理 19.6)$=\overline{\lambda T_0.V_{M_{T_0}}(\alpha',f_{T_0})}$(据 U 的选取和上面构造 $\mathbf{M}$ 时所做的那个断言)$=V_{\mathbf{M}}(\alpha',f)$。■

关于先前的对应及可定义性论述如何推广到这一背景的具体方式，这里不作更确切的定义，仅以一个简短的叙述结束本章。

对任意一个类型 $a = \langle b, c \rangle$，定义 a 的子类型为 b 和 c，以及 b 和 c 的子类型。现在假定相对于类型 a 的一个变项的 λ-抽象出现在一个项 α 中，但这个 λ-抽象不是相对于有 a 为子类型的类型的变项（a 是“相对于 α 中的 λ-抽象极大的”）。前几章中的可定义性问题这里可以按下述形式提出：“什么时候 α 等值于同样类型的一个项 α' 使得出现在其中的 λ-抽象仅相对于也在 α 中出现的类型（a 本身除外）的变项?” ［所谓“等值”是指，对任意 $\mathbf{M}$ 和 f，$V_{\mathbf{M}}(\alpha, f) = V_{\mathbf{M}}(\alpha', f)$］当然，要决定“$\mathbf{M}$”是取遍所有一般模型还是只取遍所有的标准模型。在第一种意义下，等值关系是递归可枚举的，并且可以期望有像下面那样（跟定理 18.9 有关）的结果：

“α 能归约为如所描述的 α'，当且仅当，对于所有的一般模型 $\mathbf{M}$，$\mathbf{M}'$，若它们仅在 D_a 处不同（这里 a 是 α 和 α' 的共同类型），并且诸集 D_b 因 D_a 上的差别而受影响，则对各个合适的 f 有 $V_{\mathbf{M}}(\alpha, f) = V_{\mathbf{M}'}(\alpha, f)$。”

在第二种意义下，归约将变得更加复杂，如前一样。虽然 L_ω 不是一个分枝类型论，但似乎仍然是跟罗素的“可归约公理”有关。因为，上述问题也可解释成为给定的（某种类型的）对象类寻求一个句法上最简的定义的问题。我们不会像罗素那样仅仅假定这些定义的存在，而是要研究当这些定义存在时这个问题的情形。

参 考 文 献

[1] van Benthem J F A K. A note on modal formulas and relational properties. *Journal of Symbolic Logic*, 1975, 40: 85 ~ 88

[2] van Benthem J F A K. A problem on expansions and its connection with modal logic. unpublished paper, Instituut voor Grondslagenonderzoek, University of Amsterdam, 1975

[3] van Benthem J F A K. Canonical modal logics and ultrafilter extensions. *Journal of Symbolic Logic*, 1979, 44: 1 ~ 8

[4] van Benthem J F A K. Four paradoxes. *Journal of Philosophical Logic*, 1978, 7: 49 ~ 72

[5] van Benthem J F A K. *Modal correspondence theory*, dissertation, Mathematisch Instituut voor Grondslagenonderzoek, University of Amsterdam, 1976

[6] van Benthem J F A K. Modal formulas are either elementary or not ΣΔ- elementary. *Journal of Symbolic Logic*, 1976, 41: 436 ~ 438

[7] van Benthem J F A K. Modal logic as second-order logic. Report 77-04, Mathematisch Instituut & Instituut voor Grondslagenonderzoek, University of Amsterdam, 1977

[8] van Benthem J F A K. Modal reduction principles. *Journal of Symbolic Logic*, 1976. 41: 301 ~ 312

[9] van Benthem J F A K. Ramsey eliminability. *Studia Logica*, 1978, 37: 321 ~ 336

[10] van Benthem J F A K. Some correspondence results in modal logic. Report 74 – 105, Mathematisch Instituut & Instituut voor Grondslagenonderzoek, University of Amsterdam, 1974

[11] van Benthem J F A K. Some kinds of modal completeness. *Studia Logica*, 1980, 39: 125 ~ 141

[12] van Benthem J F A K. Syntactic aspects of modal incompleteness theorems. *Theoria*, 1979, 45: 63 ~ 77

[13] van Benthem J F A K. Two simple incomplete modal logics. *Theoria*, 1978, 44: 25 ~ 37

[14] Blok W J. *Varieties of interior algebras*, dissertation, Mathematisch Instituut, University of Amsterdam, 1976

[15] Bochenski I M. *A history of formal logic.* University of Notre Dame Press, Notre Dame, 1961

[16] Bull R A. That all normal extensions of S4. 3 have the finite model property. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 1966, 12: 341 ~ 344

[17] Chang C C. and keisler, H. J. *Model theory*, North-Holland, Amsterdam, 1973

[18] Cresswell M J. *Logics and languages*, Methuen, London, 1973

[19] Doets H C. Reduction of higher-order to second-order logic. unpublished paper, Instituut voor Grondslagenonderzoek, Amsterdam, 1976

[20] Enderton H B. *A mathematical introduction to logic.* Academic Press, New York, 1972

[21] Feferman S. Persistent and invariant formulas for outer extensions. *Compostio mathematica*,

1969, 20: 29 ~ 52

[22] Fine K. An incomplete logic containing *S4*. *Theoria*, 1974, 40: 23 ~ 28

[23] Fine K. Logics containing K4. Part I. *Journal of Symbolic Logic*, 1974, 39: 31 ~ 42

[24] Fine K. Some connections between elementary and modal logic. *Proceedings of the third Scandinavian Logic Symposium*, Uppsala 1973, ed. By S. Kanger, North-Holland, Amsterdam, 1975. 15 ~ 31

[25] Fine K. The logics containing *S4*. 3. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 1971, 17: 371 ~ 376

[26] Fitch F B. A correlation between modal reduction principles and properties of relatons. *Journal of Philosophical Logic*, 1973, 2: 97 ~ 101

[27] Gabbay D. *Investigations into modal and tense logics, with applications to problems in linguistics and philosophy*, Reidel, Dordrecht, 1976

[28] Gödel, K. Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 1933, 4: 34 ~ 40

[29] Goldblatt R I. First-order definability in modal logic. *Journal of Symbolic Logic*, 1975, 40: 35 ~ 40

[30] Goldblatt R I. Metamathematics of modal logic. *Reports on Mathematical Logic*, 1976, 6: 41 ~ 77; 7: 21 ~ 52

[31] Goldblatt R I, Thomason S K. Axiomatic classes in propositional modal logic. *In*: Ceossley J. ed. *Algebra and Logic*, Springer Lecture Notes in Mathematics 450, Berlin, 1974

[32] Grätzer G. *Universal Algbra*, Van Nostrand, Princeton, 1968

[33] Henkin L. Completeness in the theory of types. *Journal of Symbolic Logic*, 1950, 15: 81 ~ 91

[34] Hilpinen R. ed. *Deontic Logic*, Reidel, Dordrecht, 1971

[35] Hintikka J. *Models for modalities*, Reidel, Dordrecht, 1969

[36] Hughes G E, Cresswell M J. *An introduction to modal logic*, Methuen, London, 1968

[37] Jech Th J. *The axiom of choice*, North-Holland, Amsterdam, 1973

[38] Jennings R E, Schotch P K, Johnston D K. Universal first-order definability in modal logic. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 1980, 26: 327 ~ 330

[39] de Jongh D H J, Troelstra A S. On the connection of partially ordered sets with some pseudo-Boolean algebras. *Indagationes Mathematicae*, 1966, 28: 317 ~ 329

[40] Kanger S. The morning star paradox. *Theoria*, 1957, 23: 1 ~ 11

[41] Kaplan D. Review of S. A. Kripke, Semantical analysis of modal logic I. *Journal of Symbolic Logic*, 1966, 31: 120 ~ 122

[42] Krabbe E C W. Propositionele Tijdslogika. Master's thesis, Instituut voor Grondslagenonderzoek, Amsterdam, 1972

[43] Kripke S A. A completeness theorem in modal logic. *Journal of Symbolic Logic*, 1959, 24: 1 ~ 14

[44] Kripke S A. Naming and necessity. In Davison D, Harman G. ed. *Semantics of natural language*. Reidel, Dordrecht, 1972

[45] Kripke, S. A. Semantic analysis of modal logic. I. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 1963, 9: 67 ~96

[46] Kripke S A. Semantic considerations on modal logic. *Acta Philosophica Fennica*, 1963, 16: 83 ~94

[47] Lachlan A H. A note on Thomason's refined structures for tense logic. *Theoria*, 1974, 40: 117 ~120

[48] Lemmon E J, Scott D. In: Segerberg K. ed. *An introduction to modal logic* (formerly called "Intensional logic"), Blackwell, Oxford, 1977

[49] Lewis C I, Langford C H. *Symbolic logic*, Dover Reprint, New York, 1959

[50] Lewis D. Counterpart theory and quantified modal logic. *Journal of Philosophy*, 1968, 65: 113 ~126

[51] Lewis D. Intensional logics without iterative axioms. *Journal of Philosophical Logic*, 1974, 3: 457 ~466

[52] Lindström P. On extensions of elementary logic. *Theoria*, 1969, 35: 1 ~11

[53] Löb M H. Solution to a problem of leon Henkin. *Journal of Symbolic Logic*, 1955, 20: 115 ~118

[54] Magari R. Representation and duality theory for diagonalizable algebras. *Studia Logica*, 1975, 34: 305 ~313

[55] Makinson D C. A normal calculus between T and S4 without the finite model property. *Journal of Symbolic Logic*, 1969, 34: 35 ~38

[56] Makinson D C. On some completeness theorems in modal logic. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 1966, 12: 379 ~384

[57] Makinson D C. Some embedding theorems for modal logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1971, 12: 252 ~254

[58] McKinsey J C C, Tarski A. Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting. *Journal of Symbolic Logic*, 1948, 13: 1 ~15

[59] Montague R. *Formal Philosophy*, Yale University Press, New Haven, 1974

[60] Montague R. Syntactical treatments of modality, with corollaries on reflexion principles and finite axiomatizability. *Acta Philosophica Fennica*, 1963 , 16: 153 ~167

[61] Mortimer M. Some results on modal model theory. *Journal of Symbolic Logic*, 1974, 39: 496 ~508

[62] Orey S. Model theory for the higher-order predicate calculus. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1959, 92: 72 ~84

[63] Plantinga A. *The nature of necessity*, Clarendon, Oxford, 1974

[64] Prior A N. *Past, present and future*, Oxford University Press, Oxford, 1967

[65] Quine W V O. Reference and modality. in: *From a logical point of view*, Harper and Row, New York, 1961

[66] Sahlqvist H. Completeness and correspondence in the first and second-order semantics for modal logic. In: Kanger S. ed. *Proceedings of the third Scandinavian Logic Symposium, Uppsala* 1973. North-Holland, Amsterdam, 1975. 110 ~ 143

[67] Segerberg K. An essay in classical modal logic. Filosofiska Studier 13, *Uppsala*, 1971

[68] Segerberg K. Decidability of S4. 1. *Theoria*, 1968, 34: 7 ~ 20

[69] Segerberg K. Modal logics with linear alternative relations. *Theoria*, 1970, 36: 301 ~ 322

[70] Segerberg K. Post completeness in propositional modal logic. *Journal of Symbolic Logic*, 1972, 37: 711 ~ 715

[71] Segerberg K. Review of M. K. Rennie, On postulates for temporal order. *Journal of Symbolic Logic*, 1972, 37: 629

[72] Shoenfield J R. *Mathematical logic*, Addison-Wesley, Reading, 1967

[73] Smoryński C. Investigations of intuitionistic formal systems by means of Kripke models. dissertation, Stanford University, 1973

[74] Solovay R M. Provability interpretations of modal logic. *Israel Journal of Mathematics*, 1976, 25: 287 ~ 304

[75] Thomason S K. An incompleteness theorem in modal logic. *Theoria*, 1974, 40: 30 ~ 34

[76] Thomason S K. Non-compactness in propositional modal logic. *Journal of Symbolic Logic*, 1972, 37: 716 ~ 720

[77] Thomason S K. Reduction of second-order logic to modal logic. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 1975, 21: 107 ~ 114

[78] Thomason S K. Reduction of tense logic to modal logic I. *Journal of Symbolic Logic*, 1974, 39: 549 ~ 551

[79] Thomason S K. Semantic analysis of tense logics. *Journal of Symbolic Logic*, 1972, 37: 150 ~ 158



下篇

模态对应理论新进展

本书的第二部分搜集了关于对应理论最近发展的几篇论文。从 20 世纪 80 年代以来，特别是在计算机科学的影响下，模态逻辑的一个重要发展是带不动点算子的新模态语言的出现，譬如命题动态逻辑和 mu-演算，这样的语言用来递归定义程序、进程和博弈。学者们吃惊地发现，这开启了关于模态对应的一个新的微细结构的研究，使得本书的方法可以在一个更大的范围内得到应用。例如，洛伯公理，尽管不是一阶的，但可以证明它能被一阶逻辑的不动点扩展语言所定义，这就形成了关于模态可定义的经典性质的一个始料未及的新观点。

第一篇论文研究哪种语法形式可以解释这个现象，论文证明一阶逻辑的一个新保持定理对此负责。论文也表明麦肯西定理比洛伯公理更复杂，从而在模态公理中建立了一个新的谱系。第二篇论文是为我的朋友和同事布洛克所做，发表在一个杂志上。布洛克去世得太早，我把这个问题进一步拓展，对带不动点算子的模态语言和带不动点算子的经典语言进行了比较。这篇论文表明可以进行递归定义的两个模态 μ-演算和可证性逻辑在本质上是相同的，至少它们是密切相关的。这个问题后来由维施尔（A. Visser）和法基尼（G. Facchini）研究完成。当然，关于之前还相互分离的这两个领域的联系在数学上和观念上的重要性仍然需要充分地掌握。

最后一篇论文阐明，即使是对于最新的逻辑，譬如目前仍在发展的关于信息流和博弈分析的逻辑，也可以利用对应理论的一些技术进行研究。事实上，对应分析解释了关于知识更新和信念修正“公设”的真正本质，把它与所谓的“构造”的更新机制联系了起来。这篇论文还表明如何拓展这一研究：对应理论的技巧也适用于时态逻辑、直觉主义逻辑（参见早期的例子，博士论文 Intuitionistic Correspondence Theory, Piet Rodenburg, Mathematical Institute, University of Amstedam, 1986）或空间结构的最新逻辑。事实上，题目“Man Muss Immer Umkehren”可以追溯到 19 世纪德国的几何学家雅可比（Jacobi），他说一个人应当总是试着把一个数学定理颠倒过来看，看看一个蕴涵式背后可能的等值式。对应理论的想法就是具有这样一种精神的探索，我希望读者能够体会到这一点。

1　极小谓词、不动点和可定义性[①]

1.1　带谓词极小化的一阶逻辑

在一个模型 M 中我们常常唯一地定义一个谓词为满足某个一阶描述 $\varphi(P, Q)$ 的最小的 P，这里 Q 是某个给定的谓词词组。本文的目的是定义一种系统的表述，使得我们能够以一种自然而有用的方式实现这一做法。

在我们得到一般定义以前，让我们先考虑某些给人以启发的例子。

例 1　极小化的一个简单情形

满足一阶公式

$$\varphi(P, Q) = \forall x(Qx \to Px)$$

的极小谓词 P 在任意一个模型 M 中都存在，而且，它显然就是谓词 Q 本身。 ■

在这一情形下，极小谓词 P 明显的是用给定的谓词 Q 而一阶可定义的。这样的事实广泛地用于(例如)模态框架对应理论中(van Benthem, 1983; Blackburn, et al., 2001)，它的最重要的部分包含在二元序上适当的一元二阶语句的一阶可定义性。

例 2　计算一个一阶的模态框架对应

一个基本的对应使模态 K4-公理 $\Box p \to \Box\Box p$ 跟可及关系的传递性 $\forall x \forall y(Rxy \to \forall z(Ryz \to Rxz))$ 联系起来。这里的标准是取在任一给定点 x 处满足前件 $\Box p$ [即一阶公式 $\forall y(Rxy \to Py)$] 的极小谓词 P。满足下面公式

$$\varphi(P, Q) = \forall u(Rxu \to Pu)$$

的极小谓词 P 就是一阶谓词 $Pv := Rxv$。在那个对应证明中，后一谓词则被用来代入 P 在后件 $\Box\Box p$ 中的所有出现 [即 $\forall y(Rxy \to \forall z(Ryz \to Pz))$]，得到 x 处的传

① Minimal Predicates, Fixed-Points, and Definibility. *Journal of Symbolic Logic*, 2005, 70 (3): 696 ~ 712.

递性：$\forall y(Rxy \to \forall z(Ryz \to Rxz))$。■

不要把例 2 跟模态 μ-演算中的不动点公式 $\mu p.\Box p$ 相混（Stirling，1999），它的意义更加复杂，以下面的 1.3 节为证。我们将要在 1.4 节中更详细地分析模态框架对应过程。但并非所有自然的谓词极小化结果都是一阶的。较一般的应用可以在逻辑程序中找到，新谓词在那里是通过适用于“极小艾尔伯朗模型”的递归规则而引入的（Doets，1994）。

例 3　计算递归霍恩子句定义

考虑下面的一个递归描述：

$$\varphi(P, Q) = Ps \wedge \forall x \forall y((Px \wedge Rxy) \to Py)$$

这里的极小谓词是一个传递闭包，它描述所有从 s 出发在有穷（0 或多）多个 R-步内能达到的点。这性质不是一阶的，但它可以再由不动点算子扩充后的一阶逻辑的、熟知的系统表述 LFP(FO) 中得到定义（Ebbinghaus & Flum，1995）。■

一个逻辑程序的极小艾尔伯朗模型是使所有由程序子句定义的谓词都有它们的极小扩充的那个语言的项模型。真正的全称霍恩子句句法保证对句子集存在有这样的模型——但是这对于极小谓词的存在并非是必要的。更一般的极小谓词在 AI 中作为“谓词限制”出现（McCarthy，1980）。谓词限制后承不同于标准的逻辑后承，仅要求结论在前提的所有谓词极小模型中成立。这是在所谓的“缺省推理”中得到广泛使用的一种系统表述。

例 4　谓词限制

假定 $\alpha(R)$ 说的是，R 为一个有始点而没有终点及极限点的离散线序。考虑一个新谓词 P 的下述描述，这里起决定作用的第二个合取支不是全称霍恩句，因为它的前件不是原子公式：

$$\varphi(P, \boldsymbol{R}) = \alpha(R) \wedge \forall x(\forall y(Ryx \to Py) \to Px))。$$

在任意个体域上 $\varphi \backslash (P, \boldsymbol{R})$ 都有 P-极小模型，P 的所指于此是由全体标准自然数组成的 R-序的始段。这个超越一阶逻辑的表达能力说明谓词限制的高度复杂性，它能在范畴的意义上定义标准模型。■

这个例子使 P 成为给定二元序的所谓的“良基部分”，它也是由一个标准归纳定义可计算的（Aczel，1977）。我们在下面的 1.3、1.4 节中还要讨论这一具体联系。

这四个例子给出了新谓词的一个一般语义模式：

MIN $P \cdot \varphi(P, \boldsymbol{Q})$　　极小谓词 P 使得 $\varphi(P, \boldsymbol{Q})$ 成立，这里 $\varphi(P, \boldsymbol{Q})$ 是带谓词 P、Q 的语言中的一个一阶公式。

根据谓词限制，我们可以更精确地陈述它的意义。在下述二阶条件的所有模型

中，记法是明确定义的：

$$\exists P\cdot(\varphi(P,Q)\wedge\forall P'((\varphi(P',Q)\rightarrow\forall x(Px\rightarrow P'x))$$

但是有时，诸如此类有用的极小条件都不是最有信息的概念。检查上述例子可知，我们实际上看到一个较具体的模型论准则，它解释了极小谓词的唯一存在性。这个准则的下述表述涉及某些记号方面无害的混用。

定义1（相交性质）　称一个一阶公式 $\varphi(P,\ \boldsymbol{Q})$ 为对于 P 具有相交性质，简记成"*IP*"，是指在任意一个模型 $\boldsymbol{M}$ 中每当对族 $\{\boldsymbol{P}_i\mid i\in I\}$ 中所有谓词都有 $M,\ \boldsymbol{P}_i\models\varphi$ $(P,\ \boldsymbol{Q})$ 时则 φ 对它们的交也成立：即 $\boldsymbol{M},\ \cap\boldsymbol{P}_i\models\varphi(P,\ \boldsymbol{Q})$。应用到 $\{\boldsymbol{P}_i\mid I\in I\}$ 为空族时的极端情形，这说的就是 $\varphi(P,\ \boldsymbol{Q})$ 对空族的交（该模型的整个个体域）成立。也就是说，$\varphi(P,\ \boldsymbol{Q})$对于具有 *IP* 的公式而言是普遍有效的。

当我们考虑极端情形，即族 $\{\boldsymbol{P}_i\mid i\in I\}$ 为空时，上面的性质说的是，$\varphi(P,\ \boldsymbol{Q})$对于空集的交（模型的整个域）成立。也就是说，$\varphi(T,\ \boldsymbol{Q})$对具有 *IP* 的公式是普遍有效的。

迄今为止的所有例子都有满足 *IP* 的定义子句——用一个直接的集合论论证容易验证。另外，它们预定的极小谓词显然就是在所给模型中满足 $\varphi(P,\ \boldsymbol{Q})$的所有谓词的交。因此，*IP* 为词组"满足给定描述的极小谓词"提供了依据。它甚至还更强一点，因为它对满足 $\varphi(P,\ \boldsymbol{Q})$的谓词的较小的族进行量化。为技术上方便起见，我们今后将要保留这一稍微不必要的过度做法。

但是，我们的例子也揭示了这一做法背后的一种具体的句法版式。下述定义引进一种广义霍恩子句，允许在"*P*-正前件蕴涵 *P*-原子"版式中出现非原子前件。例4中的子句 $\forall x$ $(\forall y(Ryx\rightarrow Py)\rightarrow Px)$ 就是一个典型的例解：

定义2　称带等词的一个一阶公式为一个 PIA-条件，是指它具有句法形式 $\forall\boldsymbol{x}(\psi(P,\ \boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{x})\rightarrow P\boldsymbol{x})$，这里 P 在前件公式 $\psi(P,\ \boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{x})$中只有正出现。同样，$\boldsymbol{Q}$ 是由基础词汇中的谓词组成的一个序组，而 $\boldsymbol{x}$ 则是由个体变项组成的一个序组。

PIA-条件的合取可以通过前件析取改写成单独一个条件。下面是这些特殊公式的主要语义性质。

命题1　所有 PIA-条件 $\varphi(P,\ \boldsymbol{Q})$都具有相交性质。

证明：（作某些无害的、记号方面的混用）假定对一切 $i\in I$ 而言 φ $(P_i,\ \boldsymbol{Q})$ 在某个模型中成立。再假定 $\varphi(P,\ \boldsymbol{Q})$的前件 $\psi(P,\ \boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{x})$ 对某个由对象组成的序组 $\boldsymbol{d}$ 成立，这里 P 为交$\cap\boldsymbol{P}_i$。据 P 的正出现可知，前件 $\psi(P,\ \boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{x})$则也对各个 $\boldsymbol{P}_i$ 自身成立。但是另一方面 $\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{d}$ 因 φ-$(\boldsymbol{P}_i,\ \boldsymbol{Q})$真而成立——从而$\cap\boldsymbol{P}_i$ 对 $\boldsymbol{d}$ 成立。 ■

由此可知，我们迄今所有四个例子的单步骤版式 MIN $P \cdot \varphi(P, \boldsymbol{R})$ ［这里 φ $(P, \boldsymbol{Q})$是一个一阶 PIA-条件］定义了唯一的谓词极小化。MIN 有一个明显的对偶 MAX，用于表示满足给定一阶描述的极大谓词；不过我们这里将坚持使用极小化。在 1.3 节中，我们将要推广这个极小化版式到一阶逻辑的一个对于嵌套应用谓词极小化封闭的扩充 MIN(FO) 上。但是目前，我们仍继续对一阶 PIA-条件作模型论分析。

1.2 关于相交性质的一个保持定理

本文的主要技术性结果是一个模型论保持定理，它说的是句法的 PIA-版式在多大程度上是表达完全的。但是在证明这个结果之前，我们要陈述一个较简单的命题，它的证明是后面的较复杂的证明的一个预热。首先，我们限制 PIA-版式。

定义 3 一个相对于 P 的全称霍恩公式是指形如 $\forall \boldsymbol{x}(\psi(P, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{x}) \rightarrow P\boldsymbol{x})$ 的一个一阶蕴涵式，其前件是从任意的 $\boldsymbol{Q}$-原子及它们的否定、正的 P-原子仅用合取和析取构造起来的公式。

这一受限制的一阶版式对于许多计算目的都是充分的，如逻辑程序或者指定的抽象数据类型。下述保持定理及其证明都取自（van Benthem，1985）。不过这个结果已经隐含于（Chang & Keisler，1973）关于缩积和子模型所作的讨论中，这个讨论又参考（Weinstein，1965）和（Malcev，1971）所做的一般结果。而且，计算机科学中采取全称霍恩子句得到一个相关语义可以在（Mahr & Makowsky 1983）中找到。为方便起见，我们在随后的论证中只考虑一元谓词 P，仅仅为节约序组记号而已。

定理 1 对于所有一阶公式 $\varphi(P_i, \boldsymbol{Q})$ 而言下述两条件是等价的：

（1）$\varphi(P, \boldsymbol{Q})$ 可用一个相对于 P 的全称霍恩公式来定义；

（2）$\varphi(P, \boldsymbol{Q})$ 相对于谓词 P 具有相交性质并且它也在子模型构造下保持。

证明： 从（1）到（2）的蕴涵是简单的。*IP* 由 $\varphi(P, \boldsymbol{Q})$ 的 PIA 形式得出——或者说，这性质可以容易地直接获证。而且在子模型下的保持也可由 φ 的全称句法形式得出。

反之，假定条件（2）成立。我们必须为 $\varphi(P, \boldsymbol{Q})$ 找出一个全称霍恩定义。考虑由 φ 的所有全称霍恩后承所组成的集：

$$\text{UH-Cons}(\varphi) = \{\text{相对于} P \text{的全称霍恩公式} \psi \mid \varphi \models \psi\}。$$

下面就是导出上述条件（1）所需要的主要观察结果：

引理 1（后承引理） UH-Cons$(\varphi) \models \varphi$。

一旦这个引理得到证明，则据紧致性定理可知，φ 将为它自己的、相对于 P 的全

称霍恩后承的某个有穷合取所蕴涵，从而它等值于这个合取。于是，因为任意一个这样的合取都等值于一个单独的全称霍恩条件，定理中的子句（1）得证。

后承引理的证明：我们需要两个主要步骤：一个是构造模型。另一个是利用已给的、φ 的保持性来转移真值。开始，令 $\boldsymbol{M}$ 是 UH-Cons(φ) 的任意一个模型。首先，我们处理一个特殊情形。假定谓词 P 对 $\boldsymbol{M}$ 中每一个对象都成立。根据以前提到的当 $\varphi(P, \boldsymbol{Q})$ 具 IP 时 $\varphi(T, \boldsymbol{Q})$ 普遍有效这一事实可知，φ 在 $\boldsymbol{M}$ 中自动成立。其次，假定 $\boldsymbol{M}$ 中某个对象 d 不满足 P。对于所有这样的 d，我们设立下述情景：

引理 2（构造引理）　存在 φ 的一个模型 N_d 和一个从 $\boldsymbol{M}$ 到 N_d 的映射 f_d，此映射是一个 Q-同构嵌入，并且是一个 P-同态。

证明：首先为各个对象 $e \in \boldsymbol{M}$ 配上一个新常项名称 $\underline{e}$，以此扩充所给的一阶语言 $L(P, \boldsymbol{Q})$。那么对各个不满足性质 P 的对象 $d \in \boldsymbol{M}$ 有：

（#）下述公式集 Σ 是有穷可满足的：

$$\Sigma = \{\varphi\} \cup \{\neg P\,\underline{d}\} \cup (\boldsymbol{M}, M) \text{ 的 } P^{+}\text{、}\boldsymbol{Q}\text{-原子图像},$$

这里后一集合是由在 $\boldsymbol{M}$ 中成立的所有 $\boldsymbol{Q}$-原子或 $\boldsymbol{Q}$-原子的否定加上在 $\boldsymbol{M}$ 中成立的所有正 P-原子所组成的。

（#）的证明：设若不然。则存在某个由来自（$\boldsymbol{M}$, M）的 P^{+}、Q-原子图像中的公式所形成的有穷合取 $\alpha(\underline{\boldsymbol{d}}, \underline{d})$，使得 $\varphi \wedge \alpha(\underline{\boldsymbol{d}}, \underline{d})$ 蕴涵 $P\underline{d}$，这里名称序组 $\underline{\boldsymbol{d}}$，$\underline{d}$ 指 $\boldsymbol{M}$ 中的对象 $\boldsymbol{d}$，d。由于个体名称 $\underline{\boldsymbol{d}}$，$\underline{d}$ 并不在公式 φ 中出现，故而这意味着 φ 蕴涵全称霍恩条件 $\forall \boldsymbol{x} \forall x(\alpha(\boldsymbol{x}, x) \to Px)$。但后者在 $\boldsymbol{M}$ 中的显然不成立与假定 $\boldsymbol{M} \models$ UH-Cons（φ）相矛盾。■

现在，对（#）应用紧致性定理就知，整个集 Σ 是可满足的。所以，存在一个模型 $\boldsymbol{N}_d$ 满足 $\{\varphi\} \cup \{\neg Pd\} \cup (\boldsymbol{M}, M)$ 的 P^{+}、$\boldsymbol{Q}$-原子图像中的所有公式。于是，考虑从 $\boldsymbol{M}$ 到 $\boldsymbol{N}_d$ 内的那个将对象 e 映成它名字 $\underline{e}^{Nd}$ 的解释的映射 f_d。这是一个 $\boldsymbol{Q}$-同构嵌入，同样也是一个 P-同态。例如，$\boldsymbol{M}$ $\boldsymbol{Q}$-同构于 $\boldsymbol{N}_d$ 的子模型 $\boldsymbol{N}_d$（$\boldsymbol{M}$），其个体域由所有名字 $\underline{e}$ 在 $\boldsymbol{M}$ 中的解释组成。■

余下要做的就是用该定理子句（2）中关于保持的假定来得到后承引理所要求的结论。

引理 3（转移引理）　$\boldsymbol{M} \models \varphi$。

证明：首先将所给的 φ 在子模型下的保持引用到上述事实 $\boldsymbol{N}_d \models \varphi$ 上。在对应于 $\boldsymbol{M}$ 的子模型 $\boldsymbol{N}_d(\boldsymbol{M})$ 中，立得 $\boldsymbol{N}_d(\boldsymbol{M}) \models \varphi$。于是我们可以利用 f_d 在 $\boldsymbol{M}$ 中复制 P 在 $\boldsymbol{N}_d(\boldsymbol{M})$ 中的解释，得到一个在 $\boldsymbol{Q}$-谓词上跟 $\boldsymbol{M}$ 重合的模型 $\boldsymbol{M}_d$，证实下述公式：

（1）φ

（2）所有来自 $\boldsymbol{M}$ 的真 P-原子

以及

（3）$\neg P\underline{d}$

现在是应用 φ 的相交性质到由所有模型 $\boldsymbol{M}_d$ 所组成的族上的时候了。结果是，φ 一定也在模型（$\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{Q}$，P^*）上成立，这里 P^* 是所有单独模型 $\boldsymbol{M}_d$ 中的谓词 P_d 的交。但后者正好是 $\boldsymbol{M}$ 自身上原来的那个谓词 P！这一经由 φ-模型的交而得到的 P^M 上的最终归零，是本证明中由所有模型 $\boldsymbol{N}_d$ 所组成的族的整个精巧结构的主要点。换句话说，（$\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{Q}$，P^*）$=\boldsymbol{M}$——从而，$\boldsymbol{M}\models\varphi$。 ■

现在我们达到本节的主要结果。这结果好像是新的——不过再一次地，也有一段历史。（Chang & Keisler，1993）的第 6 章中提到一个类似于 PIA 的句法版式，但是含有在所有谓词字母中完全地真的前件。另外，Papalaskkari 和 Weinstein（1990）在命题逻辑的背景下从句法方面刻画了 1.2 节的相交性质。

定理 2　对所有一阶公式 $\varphi(P, Q)$，下述两条件是等价的：

（1）$\varphi(P, Q)$ 相对于 P 具有相交性质；

（2）$\varphi(P, Q)$ 可由一个相对于 P 的 PIA 公式定义。

证明：像定理 1 的证明一样，此论证有同样的三个主要步骤，但由于无子模型捷径可走而有某些复杂。

从（2）到（1），此结果正好是命题 1。其次，假定条件（1）成立。再一次，我们只考虑一个一元谓词 P，以避免累赘的、用于对象的序组记法。一开始，先定义下述由 φ 的句法后承所组成的集：

$$\text{PIA-Con}(\varphi)=\{\text{相对于 } P \text{ 的 PIA}\psi \mid \varphi\models\psi\}。$$

■

引理 4（后承引理）　PIA-Con(φ) $\models\varphi$。

如果我们能证得这一引理，那么我们也就能完成上面定理的证明，因为句法可定义性条件（2）将可由紧致性定理，加上以前观察到的 PIA 公式的合取等值于单个 PIA-条件的结果得出。

后承引理的证明：令 $\boldsymbol{M}$ 是语言 $L(P, Q)$ 的任意一个满足 PIA-Con(φ) 的模型。如前一样，如果 $\boldsymbol{M}\models\forall xPx$，则据 P 具有 *IP* 性质可知 $\varphi(P, Q)$ 已经在 $\boldsymbol{M}$ 中成立。关于这个证明的余下部分，我们要假定 $\boldsymbol{M}\models\neg\forall xPx$。为了确定记号起见，令 $L(Q)$ 是仅含基础谓词 Q 的一阶语言。利用一系列关于模型和映射扩充的辅助结果，我们现在将要构建一个最终情形，正如下述引理所描述的那样：

引理 5（构造引理）　存在 $\boldsymbol{M}$ 的一个初等扩充 $\boldsymbol{M}^*$，并且对各个不满足 P 的 $d \in \boldsymbol{M}^*$ 而言有一个模型 $\boldsymbol{N}_d$ 和一个从 $\boldsymbol{M}^*$ 到 $\boldsymbol{N}_d$ 的映射 f_d 使得

（1）φ 在 $\boldsymbol{N}_d$ 中为假；

（2）$P(f_d(d))$ 在 $\boldsymbol{N}_d$ 中为假；

（3）f_d 是从 $\boldsymbol{M}^*$ 到 $\boldsymbol{N}_d$ 的 $L(\boldsymbol{Q})$-同构和 P-同态。

构造引理的证明：我们在开始时说过下述论证中的所有模型都是可数的，因而用于构造的所有模型的全体也是可数的。

如前一样，$(\boldsymbol{M}, M)$ 是模型 $\boldsymbol{M}$ 膨胀成的一阶语言 $L(P, \boldsymbol{Q})$（$\boldsymbol{M}$）的模型，此语言 $L(P, \boldsymbol{Q})$（$\boldsymbol{M}$）是由原来的语言 $L(P, \boldsymbol{Q})$ 就 $\boldsymbol{M}$ 中各个对象 e 各附加一个新的个体名字$\underline{e}$ 而形成的语言（不论 e 是否满足 P）。首先，我们找出一组模型，见证 $\boldsymbol{M}$ 中所有 P-失败。这完全类似于定理 1 证明中关于断言（#）的论证。固定 $\boldsymbol{M}$ 中任意一个满足$\neg P^M d$ 的 d。我们有

（##　）下述公式集是有穷可满足的：

（1）φ，

（2）$\neg P\underline{d}$，加上

（3）$TH(P^+, \boldsymbol{Q})$（$\boldsymbol{M}$）：$(\boldsymbol{M}, M)$ 在 $L(P^+, \boldsymbol{Q})$（$\boldsymbol{M}$）中的完全一阶理论 [即 $L(P, \boldsymbol{Q})$（$\boldsymbol{M}$）和所有 P 正出现的公式]。

(##)的证明：如果有穷可满足性失败，则 φ 蕴涵某个公式 $\alpha(P, \boldsymbol{Q}, \underline{d}, \underline{e}) \to P\underline{d}$，$P$ 在 α 中只有正出现，并且$\underline{e}$（一个或多个）和$\underline{d}$ 都是新的对象常项。但是，另一方面，全称闭包$\forall x \forall y(\alpha(P, \boldsymbol{Q}, y, x) \to Px)$却是 φ 的一个 PIA-后承，所以它必须在 $\boldsymbol{M}$ 中成立：证明完成。 ■

现在，据紧致性定理，任取（#）中整个集的一个模型 $\boldsymbol{N}_d$。它使 φ 为真，同样也使$\neg P\underline{d}$ 为真。此外，从 $\boldsymbol{M}$ 到 $\boldsymbol{N}_d$ 内的那个将 $\boldsymbol{M}$ 中对象 e 映成对象$\underline{e}^{Nd}$的映射 f_d 将保持 L（P^+，$\boldsymbol{Q}$）（$\boldsymbol{M}$）中所有 $\boldsymbol{M}$-真的一阶公式（尤其是，由于f_d 保持所有真的不相等式，故而它是一一映射）。我们可以为 $\boldsymbol{M}$ 中任意一个缺乏性质 P 的对象做这一切，最终产生一个由带有从 $\boldsymbol{M}$ 到其内的映射f_d 的模型 $\boldsymbol{N}_d$ 所组成的可数族。图示见图 1：

这是构造一个拥有“$\boldsymbol{M}$-侧”和“$\boldsymbol{N}$-侧”的初等模型链的出发点。总有一个当前的模型为 M 的初等扩充，而由所有模型 $\boldsymbol{N}_d$ 所组成的族既由已有模型的初等扩充所修正，也由附加的新模型所修正。这一构造过程中归纳步骤的实际所需比上述要少一点，因为映射f_d 不一定要是全的。

归纳步骤($k \to k+1$）令 $\boldsymbol{M}^k$ 是初等扩充 $\boldsymbol{M}$ 的那个当前的模型，同时有一族模型 $\boldsymbol{N}_d{}^k \to$（对 $\boldsymbol{M}^k$ 中各个不具有 P 性质的 d 各有一个）和部分映射$f_d{}^k$，相对于

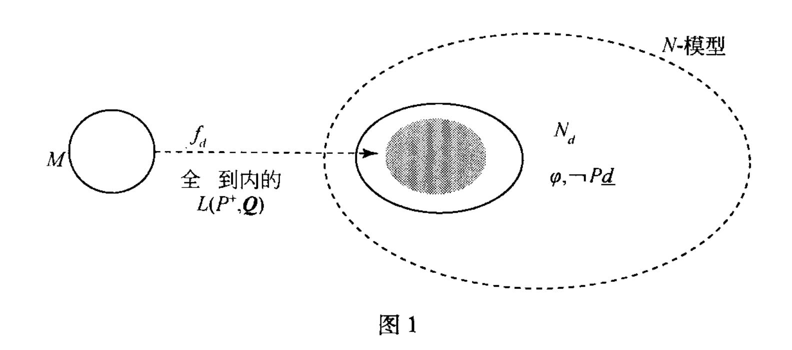


图 1

所有对象序组 e（这些对象都在 $f_d{}^k$ 的定义域中出现）映射 $f_d{}^k$ 保持语言 $L(P^+,$ $Q)$ 中所有一阶公式 α：

$$(\$)\ 如果\ M^k \models \alpha[e]，则\ N_d{}^k \models \alpha\ [f_d{}^k\ (e)]。$$

因此，当前的映射也许是部分的，而且不到上的。我们现在给出一个三个步骤的过程将这些模型和映射扩充到更大的个体域上，同时恢复我们这里一开始引用的性质——尤其是，重要的不变性（$）。

步骤 A　我们为各个模型 $N_d{}^k$ 找出一个初等扩充，同时将所给的从 M^k 到其中的映射 $f_d{}^k$ 扩充成一个在 M^k 上为全映射的新映射，但仍保持所有为真的 $L(P^+,\ Q)$ -公式。

作为准备，我们附加新的个体常项$\underline{e}$ 来表示 M^k 中落入 f_d 的定义域内的对象 e，并在 $N_d{}^k$ 中以 e 在 f_d 下的象来解释新常项$\underline{e}$。这样，两个模型同时得到膨胀。据（$）可知，每一个在 M^k 中为真的 $L(P^+,\ Q)$-公式也在 $N_d{}^k$ 中为真。其次，我们为 M^k 中所有对象附加新的个体常项，并把后一模型再作一次膨胀。我们的一阶语言现在将包含所有新常项。然后，用下述事实找出扩充的模型和映射：

(A#)　下述公式集 Σ 是有穷可满足的：

(1) 所有在二次膨胀后的模型 M^k 中成立的 P^+-正 P、Q-语句；

加上

(2) 膨胀模型 $N_d{}^k$ 的完全一阶理论。

证明：实际上，Σ 在膨胀模型 $N_d{}^k$ 中是有穷可满足的。考虑任意一个有穷子集 Σ_0。也许会有某个（2）-型公式，我们可以在扩充语言中取这些公式的任意一个有穷合取，并且对所有那些对不同于定义域 f_d 中的对象进行命名的新常项作特称量化。引用事实（1）P-正公式对合取和特称量词封闭及事实（2）原来的映射 f_d 保持 $L(P^+,\ Q)$-公式，我们得到这个存在公式已经在膨胀的模型 $N_d{}^k$ 中成立。这就为 Σ_0 给出了一个模型。■

接下来，据紧致性，我们为整个公式集Σ找到一个模型，得到所要求的初等扩充，以及如前面证明中那样的扩充映射。特别是，新映射扩充了旧映射。令f_d定义域中的对象e由常项$\underline{e}$命名。令$\underline{f}$是原来命名f_d定义域中的元素e的常项。那么原子式$\underline{e}=\underline{f}$在$\boldsymbol{M}^k$的膨胀模型中成立，从而在新模型中得到保持。

概括步骤A的结果，我们特别要注意：

$\boldsymbol{M}^{k+1,A}=\boldsymbol{M}^k$，

$\boldsymbol{N}_d^{\ k+1,A}$是$\boldsymbol{N}_d^{\ k}$的一个初等扩充，

$f_d^{\ k+1,A}\supseteq f_d^{\ k}$，在$\boldsymbol{M}^{k+1,A}$上是全映射但不必是到上的。

步骤B 我们找到$\boldsymbol{M}^{k+1,A}$的一个初等扩充$\boldsymbol{M}^{k+1,B}$,以及各个映射的一个扩充,映到$\boldsymbol{N}_d^{\ k+1,A}$上,并且仍保持所有其参变元都在$\boldsymbol{M}^{k+1,B}$中的、为真的$L(P^+,\boldsymbol{Q})$-公式。

首先，给定$\boldsymbol{M}^{k+1,A}$和任意一个模型$\boldsymbol{N}_d^{\ k+1,A}$，我们能扩充$\boldsymbol{M}^{k+1,A}$和已有的映射$f_d^{\ k+1,A}$，以致扩充映射仍保持所有$P$-正$P$、$\boldsymbol{Q}$-公式，同时在它的象中拥有所有$\boldsymbol{N}_d^{\ k+1,A}$。其论证类似于步骤A中所作。我们如前一样为$\boldsymbol{N}_d^{\ k+1,A}$中所有对象附加新的个体常项，并表明

(B#) 扩充语言中的下述公式集Σ是有穷可满足的：

(1) $\boldsymbol{M}^{k+1,A}$的完全一阶理论，

加上

(2) 由所有在扩充模型（$\boldsymbol{N}_d^{\ k+1,A}$，$\boldsymbol{N}_d^{\ k+1,A}$）中成立的$P$-正$P$、$\boldsymbol{Q}$-公式$\alpha$的否定$\neg\alpha$所组成的集合。

证明：该公式在$\boldsymbol{M}^{k+1,A}$中是有穷可满足的。否则，$\boldsymbol{M}^{k+1,A}$将会满足某个公式$\forall x(\alpha_1\vee\cdots\vee\alpha_k)$，所有这些$\alpha_i$都是$P$-正的——全称量词$\forall \boldsymbol{x}$覆盖来自（$\boldsymbol{N}_d^{\ k+1,A}$，$\boldsymbol{N}_d^{\ k+1,A}$）所用到的全部新对象名字。据对析取和全称量词封闭可知，这个公式仍在我们的P-正$L(P^+,\boldsymbol{Q})$-公式类中——所以，据（$）可知，它已经在$\boldsymbol{N}_d$中成立：证明完成。 ■

由此可知，整个公式集Σ是可满足的，并且它的任意一个模型将都是所要求的$\boldsymbol{M}^{k+1,A}$的P、$\boldsymbol{Q}$-初等扩充，同时也以一种明显的方式产生了映射$f_d^{\ k+1,A}$的适当扩充$f_d^{\ k+1,B}$。但这并不够！我们必须证明这个结论对步骤A结束时存在的所有模型$\boldsymbol{N}_d^{\ k+1,A}$都成立。

为此，我们现在以某种可数枚举的方式来排列所有这些模型，并以全部的有穷序数重复前面的构作。尤其是，在这些步骤的各步中，初始模型$\boldsymbol{M}^{k+1,A}$当前的后继将改变成某个$L(P,\boldsymbol{Q})$-初等扩充。但这不影响我们的部分映射所具有的重要的保持性($)，因为所有相关公式的真值在一个初等扩充和原来的模型

$M^{k+1,A}$之间并不改变。最后，取所产生的初等 M-模型链的并就得所要求的模型 $M^{k+1,B}$，而期间构成的映射 $f_d^{k+1,B}$也就是所要求的仍满足（＄）的满映射。注意，这些映射也是内射，因为不变性条件（＄）蕴涵着否定的原子等式的保持。

概括步骤 B 的结果，我们做如下记录：

$M^{k+1,B}$是 $M^{k+1,A}$的一个初等扩充，

$N_d^{k+1,B}=N_d^{k+1,A}$，

$f_d^{k+1,B}\supseteq f_d^{k+1,A}$，在 $N_d^{k+1,B}$上是到上的，但不必是全映射。

步骤 C　在作步骤 B 中一条初等链的并 $M^{k+1,B}$时，这模型的个体域也许会获得许多不满足 P 的对象 d，不过它们都不在任意一个能映到一个相配的模型上的映射的定义域中。最后，创造一族这样的模型，加上满足（＄）的嵌入映射，完全类似于我们在第一阶段的论证中做的那样。这个扩充并不改变 $M^{k+1,B}$，也不改变步骤 B 结束时存在的其他模型和映射。

步骤 A、B、C 相继实施的结果是：

（1）一个模型 M^{k+1}，它为 M^k 的一个初等扩充；

（2）一族模型 N_d^{k+1}，初等扩充阶段 k 结束时存在的模型 N_d^k；

（3）一族部分映射f_d^{k+1}，从 M^{k+1}映到 N_d^{k+1}上，满足有关 $L(P^+,Q)$-的公式保持性条件(＄)，定义域包含 M^k 而值域包含 N_d^k；

（4）新模型 N_d 见证 M^{k+1} 中所要不具有性质 P 的对象以及（3）中那样的映射（不必一定是到上的）。

特别是，最初的情形得到恢复。

迭代成一个初等链　为了结束构造引理的证明，我们在所有有穷序数上重复这里的归纳步骤。其结果是一条初等模型链 M^1，M^2，…，它们的并就是所要求的模型 M^*。此外，这一迭代过程保证它的各个不具有性质 P 的元素从某个阶段 k 起开始一条初等模型链 N_d^k，N_d^{k+1}，…，它们的并是构造引理所要求的模型。最后，这个过程在阶段 n 构造起来的模型 M^n 和 N_d^n 之间的所有部分映射f_d^n 的并是从 M^* 到 N_d 的 P-同态。特别是，这个映射因步骤 A 和步骤 B 中的个体域往复扩充步骤而成为一个一一到上的映射，同时关于有穷多个参变元 $\boldsymbol{d}$ 的 $L(P^+,Q)$-公式的保持性条件(＄）也因 M^*初等等价于模型 M^k（所有对象 $\boldsymbol{d}$ 最初都完全出现在此模型中）而仍然成立。 ■

现在我们准备最后确定我们的论证。

引理 6（转移引理）　$M\models\varphi$。

证明：考虑构造引理中的情景。各个模型 N_d 满足 φ，而且它 P、Q-同构于

模型（M^*，P_d），后面这个模型跟 M^* 一样，但是谓词 P 的解释被换成通过映射 f_d 从 N_d 拷贝的一个个体。这使 f_d 成为一个完全的 P、Q 同构，从而有

$(M^*, P_d) \models \varphi$。

另外，P-同态条件保证拷贝来的谓词 P_d 包含 PM^*。

最后，注意

M^* 中的对象 d 并不满足 P_d。

现在我们引用所给的 φ 的相交性质。带有所有解释谓词字母 P 的所有谓词 P_d 的交的模型 $M^{\#}$ 也一定满足 φ。但是据前面的观察结果可知，那个交正好就是 PM^*，所以 $M^{\#}$ 实际上正好就是模型 M^*。由此可知，$M^* \models \varphi$。但另一方面还有 $M \models \varphi$，因 M^* 是 PIA-Cons(φ)最初的那个模型 M 的一个初等扩充。 ■

定理 2 有若干变式；有些变式的证明简单一些。定理 1 的全称霍恩子句是一个例子。另一个特殊情形假定 P 仅出现在后件位置上。van Benthem（1996）表明这等价于将相交性质加强成一个等值式——或者说得更明白一点，是对 IP 附加了一个独立的语义要求：$\varphi(P, Q)$ 相对于 P 是单调的。

1.3 谓词极小化和不动点逻辑

谓词极小化也可以作为一个一般设计而被附加进一阶逻辑。结果是下述表述。

定义 4 带谓词极小化的一阶逻辑［MIN（FO）］拥有标准一阶逻辑所有的递归形成规则和一个新的公式形成规则

MIN$P \cdot \varphi(P, Q)$　　这里 $\varphi(P, Q)$ 是一个推广的 PIA-条件。

后者仍有定义 2 的句法形状，但 MIN(FO) 句法允许任意一个来自 MIN(FO) 的 P-正前件 $\psi(P, Q, x)$。这里，$\alpha(R, Q)$ 中不涉及 R 的原子的正出现在 MIN$R \cdot \alpha(R, Q)$ 中也是正的。 ■

MIN(FO) 跟以不动点算子的一个递归形成规则扩充一阶逻辑而成的更标准的语言 LFP(FO) 密切相关。

定义 5 LFP(FO) 以下面的一个定义最小不动点的算子

$$\mu P, x \cdot \varphi(P, Q, x)$$

来扩充一阶逻辑常用的归纳形成规则，这里的 P 也许在 $\varphi(P, Q, x)$ 中只有正出现，而 x 则是一个元数同于 P 的变项序组。相关的不动点就是谓词上的下述单调集合运算在任意一个给定模型 M 中的那些不动点：

$$F_{\varphi}^{M} = \lambda P \cdot \{M\text{中的}\, d \mid (M, P), d \models \varphi(P, Q)\}。$$

据塔尔斯基－克纳斯塔尔定理可知，$\mu P, \boldsymbol{x} \cdot \varphi(P, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{x})$ 可以正确地定义为 $\boldsymbol{M}$ 上所有满足 $\mathrm{F}_{\varphi}^{M}(P) \subseteq P$ 的谓词的交——这也就是使得 $\mathrm{F}_{\varphi}^{M}(X)=X$ 成立的 $\boldsymbol{M}$ 的最小子集。 ■

在这个定义中，P 在 φ 中正出现的那个句法条件保证了映射 F_{φ}^{M} 的单调性。这个条件得到一个熟知的模型论结果的支持。同态的林登保持定理的一个简单的变式断定，一个一阶公式 $\varphi(P, \boldsymbol{Q})$ 定义一个单调集合算子 F_{φ}^{M}，当且仅当，$\varphi(P, \boldsymbol{Q})$ 可由一个仅含谓词 P 的正出现的公式来定义。我们可以把定理 2 看成是在为 MIN(FO) 做同样的事情。

LFP(FO) 的一个变异是模态 μ-演算，这里所有谓词都是一元的，而且 $\varphi(P, \boldsymbol{Q})$ 也都是模态公式。这些模态及一阶语言也都能通过对偶化定义出最大不动点，正如我们以谓词极大化替代极小化所能看到的那样——不过这里我们不继续这方面的讨论。

不顾“极小性”这一措辞，$\varphi(P, \boldsymbol{Q})$ 的最小不动点通常不是一个能使 $\varphi(P, \boldsymbol{Q})$ 成立的谓词。例如，在 1.1 节的例 2 中，在某点处满足模态公式 $\Box p$ 的极小谓词 P [即 $\forall y(Rxy \rightarrow Py)$] 正好就是 $\{s \mid Rxs\}$。但是 $\forall y(Rxy \rightarrow Py)$ 的最小不动点（在模态 μ-演算中记成 $\mu p \cdot \Box p$）则复杂得多：它定义所给关系 R 的良基部分，出现在 1.1 节的例 4 中。不过，在这两种系统表述之间存在有一种密切的联系。

命题 2　MIN(FO) 和 LFP(FO) 具有同样的表达能力。

证明：(1) 从 LFP(FO) 到 MIN(FO)。如上描述的运算 F 的最小不动点也是一个最小“前不动点”，相关的自由变项序组记成 x，可以将它叙述如下：

$$\mu P, \boldsymbol{x} \cdot \varphi(P, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{x}) = \mathrm{MIN} P \cdot \forall \boldsymbol{x}(\varphi(P, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{x}) \rightarrow P\boldsymbol{x})。$$

这里我们可以归纳地假定 LFP(FO)-前件 $\varphi(P, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{x})$ 已经有一个 MIN(FO)-等值式。

(2) 从 MIN(FO) 到 LFPP(FO)。极小化正好出现于 PIA-条件 $\forall \boldsymbol{x}(\varphi(P, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{x}) \rightarrow P\boldsymbol{x})$ 上，P 在 $\varphi(P, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{x})$ 中仅有正出现。但同一个谓词可被描述为 $\mu P, \boldsymbol{x} \cdot \varphi(P, \boldsymbol{Q}, x)$。 ■

在语言 LFP(FO) 和 MIN(FO) 之间做选择似乎只是一个实用方便的问题。较理论地说，1.2 节中的保持结果是把正出现限制强加进 LFP(FO) 的“林登根据”的对应物。我们尝试过为 1.2 节中的保持结果找出某个较直接归约，归约成一个林登型的结果，但没有成功。

注记：一个未解决的保持问题　在这个方面，存在一个对于两种系统表述都似乎是未解决的问题。例如，定义单调集合运算的公式 $\varphi(P)$ 正好就是用 P 在其中仅有正出现的公式可定义的那些集合运算，这一结论在全语言 LFP(FO) 中

仍成立吗？对于 LFP(FO) 还不知道有任何一个林登型的定理，因为一阶逻辑常用的以紧致性为基础的模型论技术（包括 1.2 节中的那些技术）都不成功。而且用它们替代 $L_{\infty\omega}$一类的无穷语言（Barwise & van Benthem，1999）也不成功——因为 LFP(FO) 定义二元序的良基部分，这是超出这些语言的。同样的问题对于相交性质和在 MIN(FO) 定义中的使用的 PIA-版式也都是未解决的。 ■

这一对比的另一方向跟微细结构有关。关于 LFP(FO) 的最小不动点的所指可以在序数阶段中计算，遵循一个熟知的从空谓词开始的由下而上的逼近过程。尤其是，有些不动点可以在任一模型中在阶段 ω 之前统一地算出：例如，谓词在逻辑程序的极小艾尔伯朗模型中的所指。其他不动点要求阶段数增加到模型的基数，以给定二元序的良基部分为重要例子。我们可以从公式 $\mu P, \boldsymbol{x}\cdot\varphi(P, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{x})$ 的形状来预见这一情形的某些结构。例如，van Benthem（1996）用谓词 P 中的有穷连续性分析了在阶段 ω 之前的稳定化：$\varphi(P, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{x})$ 成立，当且仅当，对 P 的某个有穷子谓词 P_0 有 $\varphi(P_0, \boldsymbol{Q})$ 成立。它的句法对应物结果是 P 在 φ 中的某种正特称出现形式，没有使良基部分变得如此复杂的全称量化。在MIN(FO) 中找出类似的微细结构也是很有意义的。

1.4 模态对应理论中的极小化和不动点

在这一节中，我们探索谓词极小化和 PIA 句法的某些新应用。极小谓词被广泛地用于模态逻辑，在计算所谓的模态公式的“框架对应”时广泛引用。下面是一些基本概念——对于模态逻辑方面的更多的细节，我们参照标准的文献［例如，（van Benthem，1983），（Blackburn，et al.，2001）］。称一个模态公式 $\varphi(p_1, \cdots, p_k)$ 在一框架 $\mathbf{F}=(W, R)$ 中为真，是指对它的命题字母 $p_1, \cdots, p_k$ 的各个赋值而言 φ 在该框架的每一个世界中成立。这一概念把模态公式处理为它们的标准一阶译文 ST(φ) 在关系模型上的以一元二阶闭包，也就是处理为一元 Π_1^1 公式

$$\forall P_1 \cdots \forall P_k.\ \mathrm{ST}(\varphi)。$$

但在许多情形中，有更好的性质存在，确实是一阶性质，可以从模态公理的形式结构算出。1.1 节中的传递性和模态公理 $\Box p \to \Box\Box p$ 就是一个重要例子。这能走多远呢？

1.4.1 计算一阶对应

一阶框架对应常常是需要特别证明的。在 1.1 节中，我们已经提到 K4 公理 $\Box p \to \Box\Box p$ 对应于一阶传递性：$\forall xy(Rxy \to \forall z(Ryz \to Rxz))$。另一个熟知的情形

是下述例子。

例 5　吉奇公理（Geach axiom）$\langle a\rangle[\mathrm{b}]p\rightarrow[\mathrm{b}]\langle a\rangle p$ 对应于汇合性：

$$\forall xy(R_a xy\rightarrow\forall z(R_b xz\rightarrow\exists u(R_a zu\wedge R_b yu)))$$ ■

这样的结果可以较一致地利用一个熟知的代入算法计算出来（van Benthem, 1983; Blackkburn, et al., 2001）。它把具有适当形式（“萨奎斯特形式”）的模态公理转换等值的框架上可及关系的一个条件。

定理 3　下述形式的模态公式 $\alpha\rightarrow\beta$ 有一阶框架对应：前件 α 必须是从可能有全称模态词为前缀的原子 p，$q\cdots$，合取，析取和存在模态词构造起来的公式，而后件 β 则可以是任意一个其所有命题字母都正出现的模态公式。另外，这个一阶对应也可以统一而能行地从所给的模态公理计算出来。

证明（概要）：这个结果的证明可以在模态文献中找到。下面就是那个能行过程。计算框架对应的代入算法对于据所给形式的模态公理 $\alpha\rightarrow\beta$ 如下进行变换：

（a）将该公式翻译成它的典范一阶形式，对于命题字母用一元集合量词作前缀：

$$\forall x:\forall \boldsymbol{P}:\text{翻译}\ (\alpha\rightarrow\beta)(\boldsymbol{P},\boldsymbol{x});$$

（b）抽出前件中的特称量词，变换成受约束的全称量词后放在前缀中；

（c）算出命题字母的一阶极小赋值，使余下的前件部分为真；

（d）对出现在后件中的命题字母代入这些可定义的值——而且如果方便的话，

（e）以逻辑等值为准实施简化。 ■

例 6　对模态传递性公式 $\Box p\rightarrow\Box\Box p$ 而言，

（a）产生 $\forall x:\forall P:\forall y(Rxy\rightarrow Py)\rightarrow\forall z(Rxz\rightarrow\forall u(Rzu\rightarrow Pu))$；

（b）是空的——因为 $\Box p$ 中根本没有存在模态词，而

（c）产生极小赋值 $Ps:=Rxs$——于是

（d）代入后给出 $\forall x:\forall y(Rxy\rightarrow Rxy)\rightarrow\forall z(Rxz\rightarrow\forall u(Rzu\rightarrow Rxu))$；

（e）后者简化得常用的形式 $\forall x:\forall z(Rxz\rightarrow\forall u(Rzu\rightarrow Rxu))$。 ■

例 7　对模态汇合性公式 $\langle a\rangle[\mathrm{b}]p\rightarrow[b]\langle a\rangle p$ 而言，

（a）产生 $\forall x:\forall P:\exists y(R_a xy\wedge\forall z(R_b yz\rightarrow Pz))\rightarrow\forall u(R_b xu\rightarrow\exists v(R_a uv\wedge Pv))$；

（b）产生 $\forall x:\forall P:\forall y(R_a xy\rightarrow(\forall z(R_b yz\rightarrow Pz)\rightarrow\forall u(R_b xu\rightarrow\exists v(R_a uv\wedge Pv))))$；

（c）产生极小赋值 $Ps:=R_b ys$；

（d）代入会给出

$$\forall x:\forall y(R_a xy\rightarrow(\forall z(R_b yz\rightarrow R_b yz)\rightarrow\forall u(R_b xu\rightarrow\exists v(R_a uv\wedge R_b yv))));$$

（e）后者简化成常见的一阶形式

$$\forall x : \forall y(R_a xy \to \forall u(R_b xu \to \exists v(R_a uv \wedge R_b yv)))$$ ■

关于代入算法的正确性，大家留意参考所引的文献。主要想法是这样的。显然，步骤（a）的公式蕴涵它们在步骤（d）中得到的特殊代入实例。反之亦然，假设后者在一个模态框架 $\boldsymbol{F}$ 中是真的。如果一个萨奎斯特形式下的前件 α，对于它命题字母 p 的任意一个赋值 $V(p)$，在 $\boldsymbol{F}$ 中的一点 x 处为真，那么它也将对步骤（c）算出的极小赋值为真，这个极小赋值被包含于集合 $V(p)$ 中。因此，（d）中的代入实例说的就是，后件 β 对于那些极小赋值在 x 处成立。但是另一方面，它也对原来的 $V(p)$-赋值成立，根据由它的正句法形式导出的语义单调性。这表明，（a）中的二阶公式表达着 $\alpha \to \beta$ 在 $\boldsymbol{F}$ 中 x 处为真的框架真理性。■

在我们的观点看来，这里发生的一切是这样的。在处理萨奎斯特前件 α 时，上述算法的步骤（c）中用到谓词极小化

$$\mathrm{MIN}P \cdot \varphi(P, Q)$$

这里所有的条件都是 PIA 的。这可以由所翻译的 α 的句法形式得出，在存在模态词变成全称的前缀量词以后，结果只有模态词$\Box \cdots \Box p$ 的重迭形式还保留。相应的 PIA-条件都是很特殊的，因为所要极小化的谓词 P 并不出现在它们的前件中，仅涉及关系后继链。这是 1.3 节结尾处提到的特殊情形，它解释了一阶可定义性。然而，极小化也对其他类型的模态前件起作用——并且这提出了 1.4.2 节中上述定理的一个令人意外的推广。

注记　并非所有的一阶框架可定义的模态公式都可由一阶代入得到等值式（van Benthem，1983）。K4 传递性公理和麦肯西公理$\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$ 的合取就是一个反例。■

1.4.2　不动点逻辑中的广义框架对应

处理具有较复杂形式前件的模态蕴涵式 $\alpha \to \beta$ 时前述的代入算法就遇到了困难。

例 8　洛伯公理$\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ 定义下述两个框架条件的合取：①R 的传递性，②R 的向上良基性。二元关系的这一性质显然不是一阶可定义的。■

这里所说的原先的代入算法的不足可以如下来理解。我们并没为前件$\Box(\Box p \to p)$得到一个极小赋值，此前件是仅用 R、= 而一阶可定义的。但是，我们仍有下面的观察：

洛伯前件具有 PIA-形式$\forall y((Rxy \wedge \forall z(Ryz \to Pz)) \to Py)$。

因此，这个前件支持一个极小赋值：不在 R、= 的语言中，但在 MIN(FO)［或者等价地说，在不动点语言 LFP(FO)］中。

例 8 续　计算洛伯公理的极小赋值

更具体地分析$\Box(\Box p\to p)$可知，在世界 x 处满足洛伯公理前件的极小谓词将描述下述世界集：

$$\{y \mid \forall z(Ryz\to Rxz)\ \&\ \text{没有任何一个无穷 } R\text{-后继序列从 } y \text{ 开始}\}。$$

于是，如果我们把这个描述嵌入洛伯后件$\Box p$，那么前面提到的那个常用的合取框架条件将正确地自动产生。 ■

下述命题是这些观察的一般结果：

命题 3　带正后件和能在特称量词抽出到外层而成 PIA-条件的前件的模态蕴涵式公理在 LFP(FO)中有能行可计算的框架对应。

我们也可以在 MIN(FO)中定义这些框架对应。在两种方法的任何一种下，许多不具有萨奎斯特形式的模态公理都在不动点逻辑中有对应公式。就其本身而言，这个观察结果并不新鲜。LFP(FO)也已被明确地应用于（Nonnengart & Salas，1999），用作分析二阶框架性质并把它们转换成易处理的逻辑形式的“SCAN-算法”的一部分。

下面是有用的不动点等值式的另一个例解。

例 9　“循环回归”

模态公理（$\Diamond p\wedge\Box(p\to\Box p))\to p$ 表达这样的框架性质：“每一个带有一个 R-后继 y 的点 x 可以从 y 开始在有穷多的、相继的 R-步骤内达到。”（van Benthem，1983；Benton，2002）循环回归的前件在抽出第一个对于存在模态词$\Diamond p$而言的前缀全称量词$\forall y(Rxy\to$以后就成为一个 PIA-条件。所产生的极小谓词就是“从 y 开始在有穷多个 R-步骤内可及”。在后件中作代入以后，最终的LFP(FO)-等值式恰好就是所提到的那个框架条件。 ■

循环回归仅涉及 R 的传递闭包，因而一个简单的不动点就够了，在第一个无穷逼近阶段 ω 内就可达到。这一简晰性成立的理由是在句法方面，跟我们 1.1、1.2 节中的观察有关。从前件$\Diamond(p\wedge\Box(p\to\Box p))$ 算出的 PIA-前件是一个全称霍恩子句。通过对比可知，在由洛伯公理的非霍恩-PIA-前件$\Box(p\to\Box p)$ 算出的极小赋值中，那个不动点在它到达以前可能取任意一个无穷序数阶段，正如它计算一个二元关系的良基部分那样。

1.4.3　一个达到非不动点可定义性的谱系

极小化存在有极限。考虑前面的麦肯西公理

$$\Box\Diamond p\to\Diamond\Box p,$$

它是又一个熟知的无一阶等值式的模态原则。我们的不动点分析这里并不适用，因为其模态前件$\Box\Diamond p$ 有一个典型的非 PIA 一阶量词形式$\forall x(Rxy\to\exists y(Ryz\wedge\cdots$。存在有其他能处理这一情形的高阶对应算法（Gabbay & Ohlbach，1992；

Nonnengart & Salas，1999），但是这些并未吐露一个 LFP(FO)-条件。

的确，在这里我们有一个谱系。或许一个非不动点可定义框架条件的最简单的例子将来自带有将来模态词 F 和过去模态词 P 的基本时态逻辑。考虑熟知的戴德金公理

$$(Fp \wedge FG\neg p) \to F(G\neg p \wedge H(p \vee Fp))。$$

在严格线序（T，<）上，这个公理表达戴德金完全性：T 的每一个有下界的子集一定有最大下界。而且，其前件不是 PIA 的。并且的确，这个一元的 Π_1^1-性质不是按上述风格可定义的。

命题 4　戴德金完全性不是在 LFP(FO) 中可定义的。

证明： 戴德金连续性在实数域 R 上成立，而在有理数域 Q 中不成立。但是在这两个框架之间还存在一个熟知的潜同构。潜同构保持 LFP(FO) 的所有公式，由此立刻得到不可定义性。■

因此，我们在时序逻辑中的框架对应之间找到了一个新的谱系：

一阶的，不动点可定义的，特称高阶的。

模态逻辑中存在着一个类似的谱系：

定理 4　存在 LFP(FO) 中不可定义的模态公式。

证明： Le Bars（2002）给出了一个模态公式，它在有穷框架上的真值并不满足那个随个体域大小递增的真值概率而言的零和律。但是所有在 LFP(FO) 中可定义的公式都满足这个零和律（Ebbinghaus & Flum，1995）。更确切地说，勒巴斯考察的是满足一个简单的一阶条件的有穷框架，此条件要求一个框架具有关系宽度 2，已知这在有穷模型极限中成立，其概率是 1。然后，他考虑一个进一步的公式，此公式可以书写如下：

$$(q \wedge \Box\Diamond p) \to (p \vee \Diamond\Diamond((p \vee q) \wedge \Diamond(p \vee q)))$$

这公式在宽度为 2 的有穷框架上并不服从零和律。因此它在那个特殊情形下甚至都不是 LFP(FO)-可定义的。再一次，我们的方法失败，因为很典型前件 $q \wedge \Box\Diamond p$ 不是 PIA 的。■

我们猜想，麦肯西公理在 LFP(FO) 中就已经是不可定义的。

在校对过程中添加的　戈兰科和我最近找到了这个猜想的一个证明，我们利用下面的事实：骆文汉姆－斯科伦定理对公式 $\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$ 不成立。

注记　在（Goranko & Vakarelov，2003）中可以找到若干类似于 1.5.2、1.5.3 节中所陈述的论点，我们差不多是在写完本文后才获悉这些论点的。尤其是，他们的“正则公式”可被证明为是等值于带 PIA-前件的萨奎斯特蕴涵式的，限制于一个仅带一元基础谓词 P 的模态语言。两位作者指出，这样的公式具有在 LFP(FO) 中可定义的框架条件。此外，他们还通报了关于在扩充上述语言的模态

不动点系统表述中的对应和完全性的进一步工作。

1.4.4　某些可能的扩张

多重极小化　1.4.1节中的代入算法在带若干命题字母 p_1，p_2，…的公式 α 上可以流畅地发挥作用。这里，在以PIA为基础的极小赋值定义的前件并不涉及任何谓词 P_1，P_2，…。但是较一般地讲，相对于PIA-条件的一个合取，我们可以同时极小化一串谓词，其句法版式为 $\mathrm{MIN}P_1, P_2, \cdots \cdot \varphi(P_1, P_2, \cdots, Q)$。附带的条件是，在那个就 P 而言的蕴涵条件的前件中，所有其他被极小化的谓词都只有正出现。我们略去细节。

更丰富的模态语言　极小代入分析的适用范围远比□、◇的基本模态语言要广。适当的前件包括具有量词形式∀∃-的时序 *Until* 模态词 $U(p, q)$ ——后件在任意一个（一阶，高阶）语言中都可接受，只要它们单调于那些命题字母就行。尤其是，要使模态公理的语言和它们的自然的框架对应的语言之间在表达力上相称，在诸如模态 μ-演算一类的模态不动点语言上建立框架对应理论也是很有意义的。

高阶模型论　模态对应理论对于简单的高阶逻辑片断的模型论而言是一种试验性的研究（van Benthem，1983）。尤其是，推广它的基本可定义性结果将是很有意义的。例如，下面的命题成立吗？模态公式是LFP(FO)-框架可定义的，当且仅当像在后一种不动点语言中那样所有语句对于框架之间的潜同构保持不变。或者说，我们能否把刻画模态可定义初等框架类的戈德布拉特－托马森定理推广到LFP(FO)-可定义的框架类？作句法版式的模型论分析要求有对不动点语言的保持定理。但是，正如在1.3节中关于单调性所观察到的那样，这种肯定性结果是稀有的，因为上述证明中所用的典型的一阶例行做法不再合用。

1.5　结束语和进一步的研究方向

我们已经分析了作为逻辑装置的谓词极小化，用语义和句法两方面的条件确定了它适用的情形。本文主要的结果是一种句法刻画，刻画了所有满足为极小化的许多应用作基础的、谓词相交的语义性质的一阶公式。当后面这一装置被充分一般地添加到一阶逻辑中时，所产生的系统表述MIN(FO)为我们提供了类似不动点语言LFP(FO)的一种代用语言。此外，它也为模态逻辑框架可定义性中一些旧论题给出了新的解释，导致得到框架条件的一个新谱系，以及介于一阶逻辑和一般高阶逻辑直接的不动点可定义性的一个自然层次。最后，这一联系也指出

了不动点的一个更深刻的用途，与诸如带一阶不动点条件的μ-演算一类的较强的模态不动点语言相匹配。

1.6 致 谢

戈兰科、奥托和萨拉斯给本文提供了有益的意见，《符号逻辑杂志》的一位匿名评审也提供了很有帮助的意见，特此致谢。

参考文献

Aczel P. 1977. An Introduction to Inductive Definitions. *In*: Barwise J. ed. *Handbook of Mathematical Logic*. North-Holland, Amsterdam, 739 ~ 782

Barwise J, van Benthem J. 1999. Interpolation, Preservation, and Pebble Games. *Journal of Symbolic Logic* 64 (2): 881 ~ 903

Benton R. 2002. "A Simple Incomplete Extension of T," *Journal of Philosophical Logic* 31 (6), pp. 527 ~ 541

Blackburn P, de Rijke M, Venema Y. 2001. *Modal Logic*. Cambridge University Press, Cambridge

Chang C C, Keisler H J. 1973. *Model Theory*. North-Holland, Amsterdam

Doets H C. 1994. *From Logic to Logic Programming*. The MIT Press, Cambridge (Mass.)

Ebbinghaus H-D, Flum J. 1995. *Finite Model Theory*. Springer, Berlin

Gabbay D, Ohlbach H-J. 1992. Quantifier Elimination in Second-Order Predicate Logic. *South African Computer Journal*, 7: 35 ~ 43

Goranko V, Vakarelov D. 2003. Elementary Canonical Formulas I. Extending Sahlqvist's Theorem. Department of Mathematics, Rand Afrikaans University, Johannesburg & Faculty of Mathematics and Computer Science, Kliment Ohridski University, Sofia

Le Bars J-M. 2002. The 0-1 Law Fails for Frame Satisfiability of Propositional Modal Logic. *Proceedings LICS* (*Logic in Computer Science*)

Mahr B, Makovsky J. 1983. Characterizing Specification Languages which Admit Initial Semantics. *Proceedings* 8*th CAAP*, Springer, Berlin

Malcev I. 1971. *The Metamathematics of Algebraic Systems*. North-Holland, Amsterdam

McCarthy J. 1980. Circumscription-A Form of Nonmonotonic Reasoning. *Artificial Intelligence*, 13: 27 ~ 39

Moschovakis Y N. 1974. *Elementary Induction on Abstract Structures*. North-Holland, Amsterdam

Nonnengart, Salas A. 1999. A Fixed-Point Approach to Second-Order Quantifier Elimination with Applications to Modal Correspondence Theory. *In*: Orlowska E. ed. *Logic at Work*. Physica-Verlag, Heidelberg: 89 ~ 108

Papalaskari M-A, Weinstein S. 1990. Minimal Consequence in Sentential Logic. *Journal of Logic Pro-*

gramming, 9: 19 ~ 31

Stirling C. 1999. Bisimulation, Modal Logic and Model Checking Games. *Logic Journal of the IGPL*, 7 (1): 103 ~ 124

van Benthem J. 1983. *Modal Logic and Classical Logic*. Bibliopolis, Napoli

van Benthem J. 1985. *Logic Programming*. Lecture notes, Philosophical Institute, Rijksuniversiteit Groningen

van Benthem J. 1996. *Exploring Logical Dynamics*. CSLI Publications, Stanford University

Weinstein J M. 1965. *First-Order Properties Preserved by Direct Products*. PhD. Thesis, University of Wisconsin, Madison

2 模态框架对应和不动点[①]

（谨以此文纪念 W. J. 布洛克）

2.1 引言：容易的对应和难的对应

本文的课题可回溯至20世纪70年代，那时，在阿姆斯特丹有一个年轻的逻辑研究小组，包括布洛克、德漾、本文作者以及斯莫林斯基等访问者，他们对模态逻辑中的问题感兴趣。其中一个问题至今依旧重要，那就是算术可证性逻辑中的洛伯公理

$$\Box(\Box p \to p) \to \Box p \qquad \text{（洛伯公理）}$$

这个原则是洛伯发现的，那时他是我们年长的教授之一。那时候，我正好开始模态对应理论方面的研究工作，分析模态公理的关系框架内容。这个方法对于诸如

$$\Box p \to \Box\Box p \qquad \text{（K4 公理）}$$

一类常用的模态公理的确很起作用。

假定我们称一个模态公式 φ 在一框架 $F = (W, R)$ 中的一点 s 处为真，是指它在 F 上的所有原子赋值 V 下于 s 处为真。下述事实或许是最著名的对应观察结果：

事实1 $F, s \models \Box p \to \Box\Box p$，当且仅当，$F$ 的可达关系 R 在点 s 处是传递的，即

$$F, s \models \forall y(Rxy \to \forall z(Ryz \to Rxz))。$$

证明： 如果此关系是传递的，则 $\Box p \to \Box\Box p$ 显然在每一个赋值下成立。逆之，令 $F, s \models \Box p \to \Box\Box p$。特别有，K4-公理在我们取 $V(p)$ 为 $\{y \mid Rsy\}$ 时成

① Modal Frame Correspondences and Fixed-Points. *In*: Berman J, Dziobiak W, Pigozzi D, Raftery J. eds. Special issue in memory of Willem Johannes Blok. *Studia Logica*, 2006, 83: 1～24

立。于是，前件$\Box p$在s处成立，从而后件$\Box\Box p$也成立。而且据$V(p)$的定义可知，后者陈述的就是传递性。■

随后，洛伯公理成为一种挑战，因为它并不适合于这一简单的一阶分析模式。1973年的某一天，我为它的正确对应找到了一个语义论证：

事实2　洛伯公理在框架$F=(W, R)$中的s处为真，当且仅当

（1）F是从s开始向上R-良基的，并且

（2）F在s处是传递的。

证明：首先，洛伯公理蕴涵传递性。假定有Rsx和Rxy。设$V(p)=W-\{x, y\}$则使洛伯公理在s处为假。其次，假定（2）成立。若（1）不成立，则有递升序列$s=s_0Rs_1Rs_2\cdots$，并且设$V(p)=W-\{s_0, s_1, s_2, \cdots\}$就使洛伯公理在$s$处不成立。遇到传递性不成立的时候，根本就没什么要证明的。否则，将有一个无穷上升的p-世界序列。这序列的产生是通过取s的任意一个使p为假的后继点，并依据该框架在s处的传递性重复引用$\Box(\Box\Box p\to p)$为真的结果而得。■

这事实中的传递性条款（2）是意外的，因为模态K4-公理在可证性逻辑中总是独立设定的。第二天，德漾提出了一个优美的纯模态推导，从洛伯公理推出传递性公理。这一推导主要围绕采用下面的精选的代入实例而进行：

$$\Box(\Box(\Box p\wedge p)\to(\Box p\wedge p))\to\Box(\Box p\wedge p)$$

注记1　凭借代入获取结论。

在前面推导条款（2）的语义框架论证中有一个匹配的代入，对命题字母p代入一个一阶可定义的谓词：

$$V(p):=\{y\mid Rsy\wedge\forall z(Ryz\to Rsz)\}。$$

对于谓词p的这一选择，（$\Box p\to p$）在s处成立，从而由$V(p)$的定义就得出传递性。这一凭借适当的以集合为基础的代入的模态演绎课题在（D'Agostin, et al., 1997）中有较系统的研究。

后来，布洛克也参加了这一游戏，并且发现了从格热高奇克公理导出$\Box p\to\Box\Box p$的更加复杂的推导；这公理是洛伯公理在自返框架上的匹配物，利用代数方法而得（Blok, et al., 1978）。这个例子本来计划放在准备撰写的关于模态逻辑和泛代数的合著中，这一著作受特勒斯特拉委托为“逻辑研究”而作，也是我们学位论文的合并。尽管一些章节的草稿仍在手边搁着，但这部书未曾出现。不过，我们的友谊始终保持着，从那些日子一直到威姆过世。

作为探索模态框架对应的某些推广的一块垫脚石，本文收集了关于洛伯公理的性能的若干观察结果。我主要论述通常的对应论证能否比它们的传统表述讲得更多。我认为它们能。

2.2 模态对应：从一阶到不动点

让我们首先考察上述 K4 例子背后的一般理由。

2.2.1 由一阶代入而得的框架对应

下面是取自（Sahlqvist 1975）的一个结果，van Benthem（1974）也独立地发现了这一结果：

定理 1 对于模态公式 $\alpha \to \beta$，有一个算法来求出它的一阶框架对应。这里，前件 α 是从带全称性模态词前缀的原子经合取、析取和存在性模态词构造起来的公式，而后件 β 则是任意一个语形上的正公式。

从这种公理得到一阶框架性质的翻译算法其工作过程如下：

（1）将该模态公理翻译成它的标准一阶形式，对于命题字母用一元量词加前缀：$\forall x \forall P. ST(\varphi)(P, x)$；

（2）抽出出现在前件中的所有存在性模态词，并把它们变为受限全称量词放在前缀中；

（3）求出命题字母的一个一阶极小赋值，使前件的余下部分为真；

（4）对出现在后件本体中的命题字母代入这一可定义的赋值——而且如果方便则；

（5）实施某些以逻辑等值为准的简化。

关于这一“代入算法”的细节和它的语义正确性的证明（Blackburn, et al., 2001）。这里我们仅提供一个计算样本来说明这个方法。看上面提到的例子：

例 1 对于模态传递性公式$\Box p \to \Box\Box p$，

（1）产生$\forall x{:}\forall P{:}\forall xy\ (Rxy \to Py) \to \forall z(Rxz \to \forall u(Rzu \to Pu))$；

（2）是空的，而

（3）产生极小赋值 $Ps{:}=Rxs$——然后

（4）代入产生初始形式$\forall x{:}\forall xy(Rxy \to Rxy) \to \forall z(Rxz \to \forall u(Rzu \to Rxu))$；

（5）后者则可简化成传递性的通常形式$\forall x{:}\forall z\ (Rxz \to \forall u(DKRzu \to Rxu))$。

不为这个代入方法所包容的、具体的模态元则有洛伯公理——以及下述公式，它的前件很典型地具有不同于定理中所述的形式：

$$\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p \qquad \text{（麦肯西公理）}$$

麦肯西公理不是一阶可定义的（van Benthem，1974；1983）。

2.2.2　关于散射的一个插叙

代入方法是相当强的。尤其是，如果所有的模态词像在 K4-公理的下述变异中那样完全独立，那么上述过程也起作用：

事实 3　$\Box_1 p \to \Box_2 \Box_3 p$ 也有一阶框架对应，按完全相同的方式求出，即

$$\forall x: \forall z(R_2 xz \to \forall u(R_3 zu \to R_1 xu))。$$

下面是相关的一般概念。

定义 1　一个模态公式 φ 的散射版本是通过用 φ 中各个模态词自身的可达关系的指标来唯一标记它而得到的公式。

萨奎斯特定理适用于上述种类的任意一个蕴涵式的散射版本。理由就在于它的条件给出了关于个体出现的描述：它们不要求配对同步出现。这种条件在逻辑中是常见的，因而许多结果都有较一般的散射版本。散射因若干理由而具意义。它提出模态结果的最一般说法——而且单独一个公式中的多个模态词的相互作用适应当前组合逻辑的趋势。例如，在可证性逻辑中，不同的方块号可以表示不同算术理论（不仅皮亚诺算术）的可证性谓词。尽管如此，散射也不是哪里都适用。

定理 2　存在有一阶框架可定义的模态公式，它的散射版本不是一阶可定义的。

证明：考虑由 K4-传递性公理和麦肯西公理合取而成的一阶可定义模态公式（van Benthem，1983）：

$$(\Box p \to \Box\Box p) \wedge (\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p)。$$

甚至它的部分散射版本（$\Box_1 p \to \Box_1 \Box_1 p$）$\wedge$（$\Box_2 \Diamond_2 p \to \Diamond_2 \Box_2 p$）都不是一阶可定义的。于是，在任意一个框架中，取 R_1 为全关系就证实左面的合取支，因而代入这一切，所得到的全一阶等值式将成为麦肯西公理的一个一阶等值式：证明完成。 ■

注记 2　散射命题字母

我们也能使一个命题字母在模态公式中的每次出现变得唯一。这种散射将使任意一个模态公理都成为一阶可定义的！首先，命题散射的公式或是向上单调于各个命题字母 p，或是向下单调于 p，视 p 的单个出现的正负性而定。van Benthem（1983）已证得，向上（向下）单调于 p 的模态公式 $\varphi(p)$ 是框架等值于 $\varphi(\bot)$ [$\varphi(\top)$]的。所以，命题散射的公式是框架等值于闭公式的，而后者全都是一阶可定义的。

2.2.3　框架对应和不动点逻辑

洛伯公理不在萨奎斯特定理的句法范围之内，因为它的前件有一个模态方块号作用于一个蕴涵式上。它的传递性加良基性的框架等值式虽然不是一阶的，但却还是在一种自然扩充［即 LFP(FO)：带不动点算子的一阶逻辑］中可定义的。

事实 4　二元关系 R 的良基部分是单调集合算子$\Box(X) = \{y \mid \forall z(Ryz \to z \in X)\}$ 的最小不动点。

简单的证明可以在（例如）（Aczel，1977）中找到。这个良基部分可以在 LFP（FO）的语言中写成为相应的最小不动点公式$\mu P, x. \forall y(Rxy \to Py)$。

我们如何能像一阶框架条件那样系统地找出这一扩充的 *LFP*(*FO*)-可定义形式的模态框架等值式呢？下一子节将叙述取自 van Benthem（2005）的某些相关的结果——而在（Nonnengart，et al.，1999；Goranko，et al.，2003）中也以不同的方法研究了以不动点为基础的对应思想。作为一个出发点，洛伯公理提出了一个一般原则，因为代入算法中的极小赋值步骤仍起作用。考虑前件$\Box(\Box p \to p)$。如果这个模态公式在一个模型 M，x 的任意点处成立，那么对于 p 一定有一个最小的谓词 P 使它在 M，x 处为真——因为下述集论性质保证有一个极小证实谓词：

事实 5　如果对一切$i \in I$有，$\Box(\Box p_i \to p_i)$在一世界 x 处成立，那么对于 $P = \cap_{i \in I} p_i$ 而言$\Box(\Box P \to P)$在 x 处成立。

这一事实是容易验证的。下述定义是这一具体观察背后较普遍的概念。

定义 2　称一个一阶公式$\varphi(P, Q)$具有相交性质，是指在每一个模型 M 中每当$\varphi(P, Q)$对某个谓词族$\{P_i \mid i \in I\}$中所有谓词都成立时它也对这些谓词的交成立，即 M，$\cap_{i \in I} P_i \models \varphi(P, Q)$。

于是，洛伯前件显示了一种典型的句法版式，保证相交性质一定成立。如下，我们可以更一般地详细确定这一点。

定义 3　称一个公式为一个 PIA-条件，即“正前件蕴涵原子”，是指它有下述句法形式：

$\forall x(\varphi(P, Q, x) \to Px)$，这里 P 在$\varphi(P, Q, x)$中仅有正出现。

例 2　洛伯公理

翻译$\Box(\Box p \to p)$就产生一阶 PIA 公式$\forall y((Rxy \wedge \forall z(Ryz \to Pz)) \to Py)$。

例 3　霍恩子句

PIA 版式的一个较简单的情形是仅有一关系 R 的转递闭包来定义模态可及性的全称霍恩子句：$Px \wedge \forall y \forall z((Py \wedge Ryz) \to Pz))$。满足这个子句的极小谓词 P 由从 x R-可达的所有点组成。

很容易明白，这个特殊的句法版式蕴涵前面的语义性质：

事实 6　PIA-条件蕴涵相交性质。

作为背景，下述定理是模型论的一个保持（性）结果：

定理 3　对一切一阶公式 $\varphi(P, Q)$ 而言，下述两断言是等价的：

（1）$\varphi(P, Q)$ 相对于谓词 P 具有相交性质；

（2）$\varphi(P, Q)$ 是用 PIA 公式的合取可定义的。

就我们的目的而言，需要知道的倒不如说是用相交性质的极小谓词看上去像什么。这里，标准的不动点逻辑提供了一个答案：

事实 7　PIA-条件的极小谓词全都是在语言 LFP(FO)中可定义。

例 3 是一个例子，因为可及关系的转递闭包很典型地在 LFP(FO)中是可定义的。下面是另一个例子：

例 4　计算洛伯公理的极小赋值

对$\Box(\Box p\to p)$做更严密的分析，在一世界 x 处满足洛伯公理前件的极小谓词描述下面的世界集：

$$\{y \mid \forall z(Ryz\to Rxz)\ \&\ \text{没有任何一个 } R\text{-后继点序列以 } y \text{ 为始点}\}$$

那么，如果我们把这个二阶描述代入洛伯后件$\Box p$，则自动获得通常的（前面提到的）合取框架条件。

现在，把这些条件插入上述代入算法中，这样就产生原先的萨奎斯特定理相对于较广框架对应类的一个推广：

定理 4　具有模态 PIA-前件、语形上的正命题后件的模态公理全都有在 LFP(FO)中可定义的对应框架条件。

2.2.4　更多的例解和局限

这一推广的对应方法所包容的结果远不止到此为止提到的两个例子。下面是 PIA-条件的更多的几个例子，洛伯公理的变式。

例 5　两个简单的洛伯变式

（1）关于公式$\Box(\Diamond p\to p)\to\Box p$，与前件中的 p 相关的最小不动点是由 $\mu P, y.\ Rxy\wedge\exists z(Ryz\wedge Pz)$ 定义的，这里以 x 为当前世界。这等值于恒假命题 $\bot$，而且，公式$\Box(\Diamond p\to p)\to\Box p$ 的确是框架等值于$\Box\bot$的，正如直接验证的那样。

（2）熟知的洛伯公理的框架不完全“亨金变式”写作：$\Box(\Box p\leftrightarrow p)\to\Box p$。这可以等值地改写为（$\Box(\Box p\to p)\wedge\Box(p\to\Box p)\to\Box p$）。这里，前件是由 PIA-式组成的一个合取，并且如上那样解开这些 PIA-式就产生极小不动点公式μP，$y.(Rxy\wedge\forall z(Ryz\to Pz))\vee\exists z(Rxz\wedge Pz\wedge Rzy))$。

这里，散射也可以帮助获得更大的普遍性：

事实 8　在任意框架 $F=(W, R_1, R_2, R_3)$ 上模态公式$\Box_1(\Box_2 p\to p)\to\Box_3 p$等值于下述两个关系条件的合取：

（1）R_3；$(R_2)^*\subseteq R_1$ ［这里 $(R_2)^*$ 指 R_2 的自返传递闭包］；

（2）下述意义上的向上良基性：没有一个世界 x 可以导出一个无穷的上升世界序列 $xR_3y_1R_2y_2R_2y_3\cdots$

证明： 首先，散射的洛伯公理蕴涵广义的传递性（1），跟我们已经能够看到的它蕴涵传递性完全一样。其次，假定（1）成立，很容易看出，不能满足散射的洛伯公理将产生一个为（2）所不需的无穷上升世界序列；逆之，任意一个使 p 仅在这样一个无穷 y-序列上为假的赋值将使散射的洛伯公理在世界 x 处为假。■

注记 3　事实 8 的提出来自我与斯泰斯福德（Chris Steinsvold，纽约城市大学）的一个电子邮件讨论。他还分析了部分的散射公理$\Box_1(\Box_2 p\to p)\to\Box_1 p$。一般的对应也由费丁独立发现。

但是，我们也能按同样的方式考察相当不同的模态原则。

事实 9　模态公理 $(\Diamond p\wedge\Box(p\to\Box p))\to p$ 有一个 PIA-前件，其极小赋值产生这样的 LFP(FO)-框架条件：每当 Rxy 成立时，x 可以从 y 通过相继 R-步的某个有穷序列达到。

这里，所要求的代入的复杂性仍可能有相当大的变化，依赖于通常由下而上的序数逼近过程得到前件的最小不动点的复杂性。例如，要得到一个关系的良基部分可以取任意一个等于该模型的序数来做。不过对于仅有原子前件的霍恩子句，这一逼近过程在任一模型中都统一地稳定在 ω 阶段，并且定义也较为简单。

尽管如此，目前这种风格的分析也还有一些局限性。并非每一个模态公理都能使用不动点方法！

事实 10　表达戴德金连续性的时态逻辑公理不可由 LFP(FO) 中的框架条件定义。

证明： 戴德金连续性在实数序 $(R, <)$ 中成立，但在有理数序 $(Q, <)$ 中不成立。但这两个关系结构使同样的 LFP(FO) 语句有效，因为在它俩之间存在一个潜同构，而 LFP(FO) 语句对此不变。■

回到模态语言中来，洛伯前件$\Box(\Box p\to p)$和麦肯西前件$\Box\Diamond p$常常被看做在同一复杂性层次上，它们都超出萨奎斯特形式。但是，在当前的可极小化谓词的一般化分析中，后者似乎比前者复杂得多！的确，戈兰科和本作者正好发现了下述断言的一个证明：

事实 11　麦肯西公理$\Box\Diamond p\to\Diamond\Box p$ 没有任何 LFP(FO) 可定义的框架对应。

其证明用到两个观察结果。首先，van Benthem（1974）表明麦肯西公理如

何在某个不可数框架上成立，而在它的任意一个可数初等子框架上不成立。但是弗卢姆在抽象模型论中所做的一个论证表明，LFP(FO)满足强的勒文海姆－斯柯伦定理。

2.3　模态不动点语言

模态逻辑的一个显著趋势是加强模态语言消除仅以□、◇为基础而造成的表达上的不足。这反映了对逻辑设计的一种要求，要求它具有最佳的表达力，不再为先辈们传留下来的较弱的语言的特性所累。然而，“重建一种平衡”还是很有意义的。上述自然模态公理的框架对应语言涉及 LFP(FO)，即一阶逻辑附加不动点算子而成的语言。因此，让我们同样扩充模态语言自身，两边都利用不动点来工作。

2.3.1　模态 μ-演算

有一个扩充的语言非常适合于2.2节。它就是模态μ-演算——LFP(FO)的自然模态片段，是动态命题逻辑的一个自然扩充。Harel 等（2000）对它的句法、语义和公理系统有一快速的概览。这一有力的形式系统可以表述按下述版式来定义的最小不动点：

$\mu p.\varphi(p)$，要求 p 在 φ 中只有正出现。

这就把一般句法递归附加到基本模态语言中，而无须在可及序上作任何假定。

定义 4（不动点语义）　在任意一个模型 M 中，命题字母 p 在其中仅有正出现的公式 $\varphi(p)$将定义一个包含－单调的集合转换

$$F_{\varphi}(X) = \{s \in X \mid (M, p:=X), s \models \varphi\}$$

据塔尔斯基－克纳斯特尔定理可知，运算 F_{φ} 一定有一个最小不动点。这个不动点可以通过序数逼近阶段由下而上得到：

$$\varphi^{0}, \cdots, \varphi^{\alpha}, \varphi^{\alpha+1}, \cdots, \varphi^{\lambda}, \cdots;$$

这里，$\varphi^{0}=\varnothing$，$\varphi^{\alpha+1} = F_{\varphi}(\varphi^{\alpha})$，并且 $\varphi^{\lambda} = \cup_{\alpha<\lambda}\varphi^{\alpha}$。

最小不动点公式$\mu p.\varphi(p)$表示第一个使 $\varphi^{\alpha} = \varphi^{\alpha+1}$“重复”的阶段。

例 6　传递闭包和动态逻辑

μ-演算可以从动态逻辑定义出一个典型的、像“某个φ-世界可在有穷多个R_a-步骤内达到”那样的传递闭包模态词，甚至还可有两种说法：

$$\langle a^{*}\rangle\varphi = \mu p.(\varphi \vee \langle a\rangle p) \qquad \text{（自返传递闭包）}$$

$$\langle a^{*}\rangle\varphi = \mu p.(\langle a\rangle\varphi \vee \langle a\rangle p) \qquad \text{（传递闭包）}$$

例 7 良基性重述

事实 4 的模态含义是这样的。最小不动点公式 $\mu p. \Box p$ 在任意一个模态模型中定义就$\Box$而言的可达关系的良基部分。

μ-演算也包含最大不动点 $\nu p. \varphi(p)$，定义为

$$\neg \mu p. \neg\varphi(\neg p)$$

最后，我们知道 μ-演算是可判定的，并且它的有效式是由下述两个在极小模态逻辑 K 上增加的简单证明规则而能行公理化的：

$$\mu p. \varphi(p) \leftrightarrow \varphi(\mu p. \varphi(p)) \qquad \text{（不动点公理）}$$

$$\text{若} \vdash \varphi(\alpha) \to \alpha, \text{则} \vdash \mu p. \varphi(p) \to \alpha \qquad \text{（闭包规则）}$$

2.3.2 利用模态逻辑中的不动点工作

这个扩展的形式系统作为一种模态语言其操作性是不错的，只是这一特征迄今还未得到普遍赏识。我们要用几个例子来说明这个方向。

为方便起见，我们把上述 $\langle a^* \rangle \varphi$ 写成它的对偶，即动态逻辑型的一个模态词$\Box^* \varphi$，它所说的是 φ 在就单个$\Box$而言的可达关系 R 的传递闭包中可达的所有世界处为真。这样所产生的语言是对前面对应论证的形式化，并且它也提出了模态公理的新变式。

事实 12 $\Box^*(\Box p \to p) \to \Box^* p$ 恰好定义 R 的向上的良基性。

这结论可从前面关于散射的洛伯公理的对应事实 8 得出。因此，传递性需要另加一个明显的 K4-公理，把洛伯可证性逻辑的两个方向明显地分隔开来。在后文中，我们还要回过来讨论这种陈述事情的方式。

其次，下面的例子是一个完全被改写成形式模态演绎形式的对应论证。

例 8 重访散射的洛伯公理

事实 8 中的散射洛伯公理蕴涵着框架条件 R_3；$(R_2)^* \subseteq R_1$，这条件对应于模态公理

$$\Box_1 p \to \Box_3 \Box_2{}^* p$$

在动态语言中，上面的公式可从一个散射洛伯公理导出：

(1) $\Box_1(\Box_2 \Box_2{}^* p \to \Box_2{}^* p) \to \Box_3 \Box_2{}^* p$ $\Box_2{}^* p$ 替代 p 的散射洛伯公理；

(2) $\Box_2{}^* p \leftrightarrow (p \wedge \Box_2 \Box_2{}^* p)$ 关于 * 的不动点公理；

(3) $p \to (\Box_2 \Box_2{}^* p \to \Box_2{}^* p)$ （2）的结论；

(4) $\Box_1 p \to \Box_1(\Box_2 \Box_2{}^* p \to \Box_2{}^* p)$ （3）的结论；

(5) $\Box_1 p \to \Box_3 \Box_2{}^* p$ 来自（1）和（4）

这一模态形式化的另一例证是最初的事实 2 本身。它说的是，洛伯公理等值于

K4 公理加上就向上的良基性而言的 μ-演算公理 $\mu p.\Box p$。但这也可以由纯模态演绎来证明。

定理 5　洛伯逻辑等价于由下述两个原则所作的公理化：

（1）$\Box p\to\Box\Box p$；　　（2）$\mu p.\Box p$

证明：首先，从洛伯逻辑到（1）是前面已提及的一个纯模态演绎。其次，（2）的导出如下。据 μ-演算的不动点公理，我们有 $\Box\mu p.\Box p\to\mu p.\Box p$。所以只需得到 $\Box\mu p.\Box p$。洛伯公理蕴涵着：

$$\Box(\Box\mu p.\Box p\to\mu p.\Box p)\to\Box\mu p.\Box p$$

并且此公式的前件是可推导的，由 μ-演算不动点公理之逆经模态必然概括而得。其次，假定（1）和（2）。我们将证明在 K4 中有，

$$\mu p.\Box p\to(\Box(\Box q\to q)\to\Box q)$$

据前面关于最小不动点的导出规则可知，对任意公式 α 如果能证明 $\Box\alpha\to\alpha$ 则也能证明 $\mu p.\Box p\to\alpha$。但利用 K4 中的一个简单推导，我们可以证得

$$\Box(\Box(\Box q\to q)\to\Box q)\to(\Box(\Box q\to q)\to\Box q)。$$ ■

洛伯逻辑的这一新公理化仅在一个 μ-演算基础上起作用。关于这两个逻辑之间的联系的更多讨论，参见本文后面的 2.4 节。现在，继续进行我们的实用观察，洛伯公理的上述版本还蕴涵着向上的良基性，从而在这个良基序上有一种归纳证明形式。因此，在洛伯公理和动态命题逻辑的归纳公理

$$(\Box\varphi\wedge\Box^*(\varphi\to\Box\varphi))\to\Box^*\varphi) \qquad \text{(IND)}$$

之间也必定有一种直接的联系。

事实 13　洛伯公理加不动点公理 $\Box^*\varphi\leftrightarrow(\Box\varphi\wedge\Box\Box^*\varphi)$（FIX）可以导出动态命题逻辑的归纳公理。

证明：这可以利用上述洛伯公理的分析来证，因为归纳公理表达了 $\Box^*$ 的最大不动点特征。一个明显的模态推导可见（van Benthem, et al., 2006）的扩充版中，它指出早先发表的有穷树逻辑有一个多余的公理集，包括完整的 PDL 和洛伯公理。 ■

不过我们也可把可证性逻辑和不动点逻辑直接的联系重新表述如下：

定理 6　洛伯逻辑可以忠实地嵌入 μ-演算。

证明：做这一工作的转换如下：

（1）公式 φ 中的每一个 $\Box$ 都换成它的传递闭包版本 $\Box^*$；

（2）对所产生的公式 $(\varphi)^*$，取蕴涵式 $\mu p.\Box p\to(\varphi)^*$。

直接验证就得，未经转换的模态公式 φ 在向上良基的传递模型上有效，当且仅当，$\mu p.\Box p\to(\varphi)^*$ 在所有模型上有效。 ■

因此，从 μ-演算的可判定性可以得出洛伯逻辑的可判定性。维施尔指出，还

可以使这个转换更具组合性：

$$\Box(\varphi^0) = \Box^*(\mu p.\Box p \to (\varphi^0))$$

其他特征或许也会有应用，例如，μ-演算的强内插性（D'Agostino，et al.，2000）。于是，后一系统的表达力强于可证性逻辑常用的模态语言的表达力。但是，这一扩充也给后一领域提出有意思的新问题——例如：

问题 1　可证性逻辑常用的算术解释能推广到带一个完整的 μ-演算的可证性逻辑吗？

这就要求有一个能顾及任意一个良基关系 R 和它们的传递闭包之间的差异的算术转换。不过，根据 Visser（2005）的见解，这问题没有多少意义（见 2.4 节）。

2.3.3　在扩充的模态语言中的框架对应

μ-演算只是基本模态语言的一系列带递归机制扩充中的其中一个。

μ-演算的片段　一个有用的、较弱的语言是从原子可达关系 a，b，…和验证? φ（这里 φ 是任意公式）并利用二元关系上的复合；并 $\cup$ 和迭代 * 等运算构造起来的动态命题逻辑（PDL），对于各个程序表达式 π 它拥有一个模态词 $\langle\pi\rangle$。PDL 可以处理前述例子中的大多数，以事实 12 为证。该事实说的是，洛伯公理的一个 PDL-变式定义 $\mu p.\Box p$。它的表达能力的更多的例子将在 2.3.4 节中给出。例 6 已经表明 PDL 是如何包含在 μ-演算中的。此外，Harel 等（2008）证明了它是严格较弱的。

事实 14　不动点公式 $\neg\mu p.\Box p$（或换成 $\nu p.\Diamond p$）不是 PDL-可定义的。

证明：这公式定义由所有能开始某个无穷 R-序列的世界所组成的集合，但据一个简单的语义论证可知，这个集不是在 PDL 的语言中可定义的。 ■

从上而下看，前面的观察表明，μ-演算有自然的片断来限制它的递归能力。这些片断之一已经出现在事实 9 中：

定义 5（ω-μ-演算）　ω-μ-演算只允许一种存在版式下的不动点算子，其中逼近序列总是稳定于 ω-阶段：

（i）$\mu p.\ \varphi(p)$，p 依据下述句法构造起来；

（ii）P | 无 p 的公式 | $\vee$ | $\wedge$ | 特称模态词。

van Benthem（1999）证明了一个保持定理，表明这个版式对于逼近映射“有穷分配性”所要求的性质是充分的。显然，PDL 被包含于 ω-μ-演算。但是还存在有一个阶层：

事实 15　ω-μ-公式 $\mu p.([1]\bot\wedge[2]\top)\vee(\langle 1\rangle p\wedge\langle 2\rangle p)$ 不是在 PDL 中可定义的。

证明（概要）：这个公式说的是，存在一个有穷的二元树形子模型，它从当前世界开始，并且在各个非终点处既有R_1-后继又有R_2-后继。PDL-公式只描述沿着属于某个基于验证和转换之上的正则语言的有穷轨迹而产生的可及性。这个树性质跟那个不一样。■

可是，PDL 是对一种更加特殊的递归的联立的最小不动点封闭的，由存在公式 $\langle\pi\rangle p$ 的析取组成,这里命题递归变项 p 只出现在最后的位置上。这里我们不作详述（van Benthem，et al.，2005）。

命题量词

但是还存在有更多相关的扩充模态语言，尤其是μ-演算跟那拥有命题字母上的二阶量词的、更加强的模态系统 SOML 有关。关于 SOML 的最近的模型论研究请参看（ten Cate，2005）。事实 12 和定理 5 引出下述事实。

事实 16　μ-演算在附加有一个 PDL 型迭代模态词$\Box^*$的 SOML 中是可定义的，这里的$\Box^*$涉及从当前世界可达的所有世界。

证明：一个最小不动点公式$\mu p.\varphi(p)$表示的是定义 4 中映射 $F_\varphi(X)$的所有“前不动点”的交，这里 $F_\varphi(X)\subseteq X$。但是后一集合也是由 SOML-公式$\forall p$: $\Box^*(\varphi(p)\to p)\to p$ 用一个一元谓词量化来定义的。■

PDL-附加在这里是必要的，因为 SOML-公式本身具有穷模态深度，它们对此是不敏感的，正如基本模态公式那样。有意思的是，这里最后那个公式完全像（Hollenberg，1998）中那个用于证明 PDL 附加“双模拟量词”将拥有等价于μ-演算的表达力的公式。

我们用一个具体的例子来得到结论，新的系统表述确实扩充了原来的系统表述。

事实 17　良基性在基本模态逻辑中是不可定义的。

证明：假定模态公式 φ 定义良基性。那么它在框架（N，S）中的点 0 处为假，这里 S 是直接后继关系。但是另一方面，由基本模态公式的有穷深度性质可知，φ 将也会在某个有穷框架（$\{0,\cdots,n\}$，S）中的点 0 处为假，这个框架是良基的。一个类似的不可定义性论证将对上述公式 $p\to\Diamond^*p$ 起作用，注意：带一个部分映射 R 并使它成立的框架正好就是由所有不相交有穷圈组成的集合。■

同样也可以证明良基性在 SOML 中也是不可定义的，因为逻辑 SOML 仍然具有有穷深度性质。

2.3.4　在各种不动点语言中的框架对应

跟基本理论相比较，带模态不动点的语言支持新的有趣的框架对应。其中某

些对应出现在动态命题逻辑中，另一些则关键性地涉及 μ-演算，最后，我们还可考察 SOML。

例 9　循环回归简化

公式 $p\to\Diamond^{*}p$ 说的是，每一个点 x 为某个有穷 R-圈的一部分。

例 10　项改写

公式 $\Diamond\Box^{*}p\to\Box\Diamond^{*}p$ 表达弱汇合性：从一个共同起点分出来的点将在该关系的传递闭包中有共同的后继。项改写的基本定律因而相当于这一类模态可定义图性质之间的蕴涵。

这些结果都被包容于定理 1 的下述推广。它绝非是最好的可能结果，但它确已表明如何对最初的极小代入算法进行推广。

定理 7　存在一个算法能为所有模态蕴涵式 $\alpha\to\beta$ 在 LFP(FO) 中找出框架对应，这里后件 β 整体上是正公式，而前件 α 则是根据下述条款构造出来的公式：

（1）命题字母，可以带有全称模态词 π 前缀，但所有命题字母在这个 PDL-程序 π 中都只是正出现；以及

（2）$\wedge$，$\vee$ 和关于无 PDL 验证词 σ 的存在模态词 $\langle\sigma\rangle$。

证明：（证明概述）像在 2.2 节中那样，主要的算法是为 $\langle\sigma\rangle$ 找出全称前缀。其次，动态逻辑算子 π 表达 PIA-条件，可以用作 LFP(FO) 内极小化的基础。 ■

可是，这个说法似乎仍不完全是最佳的，因为真正的不动点版本也许对相关的句法描述会有很大的不同。迄今已有的、模态不动点语言对应方面的最好结果，请参看（Goranko，et al.，2003）。

例 11　再描述模态词

从 μ-演算的角度看，全称模态词 $[a^{*}]\ p$ 就是一个最大不动点 $\nu q.\ p\wedge aq$。因此，p 的极小化于此将计算模样复杂的迭代不动点公式 $\mu p.\ \nu q.\ p\wedge aq$。于是，我们可以看到，这等价于由从当前世界 a^{*}-可及的世界所组成的集合——这个集合也可以用 LFP(FO) 中一个 μ-型不动点来描述。

另一方面，回到较弱的对应语言，我们也许还会丢掉定理 7 中的全称模态词，只在 ω-μ-演算或 PDL 中工作。

问题 2　萨奎斯特定理在动态命题逻辑中的最可能的表述是什么？在模态 μ-演算中又如何？

Nonnengart 等（1999）也提供了很一般的对应方法 DLS，可以回溯至二阶逻辑中的阿克曼引理。最后，Gabbay 等（1992）的 SCAN 算法也涵盖一阶和高阶的情形。

除对应问题外，还有模态可定义性的问题。上面例子中的许多公式都满足基本模态公式常用的语义性质：它们在生成子框架、不相交并、p-态射像下保持并

对超滤扩充反向保持。前三个保持因它们双模拟不变而对所有 μ-演算公式成立。至于对超滤扩充的反方向保持，很容易看出基本模态语言常用的证明行不通，因为需要某种无穷析取裂分。但是我们并不能为这样的性质找出反例。跟基本模态公式不同的典型差异实际上也许就在于前者在有穷求值方面的限制，甚至完全不同于涉及 $\Diamond^*$ 的 PDL-公式。

这些观察提出了各种各样的新问题。作为一个例解，我们陈述一个基本的模型论问题：

问题 3　关于带不动点的模态逻辑是否有一个哥德布拉特 - 托马森定理，来断定模态可定义 LFP(FO) 框架类正好就是那些满足所述四个性质保持的框架类呢？

注记 4　扩充的语言和表达完全性

有时，时态逻辑的语言扩充对于紧凑地表达早先的对应也很有意义。考虑事实 9 中的模态公理 $(\Diamond_a p \wedge \Box_a(p \rightarrow \Box_a p)) \rightarrow p$，它表达了循环回归的一个变式。这个框架对应也可以在动态命题逻辑中用一个过去时态算子来表达：

$$p \rightarrow a\langle(((\mathrm{PAST}p)?;a)^*\rangle\langle a\rangle p$$

(Venma，1991) 中表明，带逆模态词的、"能变通的" 形式表述对于在模态语言内定义 2.2 节中的代入这一目的而言是很自然的。这里的一般要点是，带有为特殊世界命名的名称和回顾时态算子的语言将定义极小谓词代入，使模态语言对于它自己的萨奎斯特定理而言在表达上完全。也请参看 (ten Cate，2005) 中关于混合语言的框架类可定义性结果。

2.4　关于可证性逻辑的一个插叙

μ-演算或许是最自然的模态不动点逻辑。但是还存在有其他的（而且更老的）模态不动点逻辑！本节讨论模态不动点逻辑中两大传统之间的联系。自始至终，我们将都要在洛伯可证性逻辑的背景下进行讨论，除非另有特别说明。

2.4.1　德漾 - 桑宾不动点定理

可证性逻辑的一个著名结果就是为哥德尔定理证明作基础的算术不动点引理的下述模态表述：

定理 8　任意一个模态公式 $\varphi(p, q)$，命题字母 p 在其中仅出现于至少一个模态词的辖域内，而 q 则是某个由其他命题字母形成的序列。那么在洛伯逻辑中可证得，存在一个公式 $\psi(q)$ 满足 $\psi(q) \leftrightarrow \varphi(\psi(q), q)$，而且这一相对于 φ 的不动点方程的任两个解都是可证等值的。

关于证明请参看（Smorynski，1984）。这篇综述论文也给出了一个简单的算法来明显地计算不动点 $\psi(q)$。典型的结果是下述不动点：

例 12　解可证性逻辑中的不动点方程。

下面有几个典型的情形：

方程		解
	$p \leftrightarrow \Box p$	$p = \top$
	$p \leftrightarrow \neg \Box p$	$p = \neg \Box \bot$
	$p \leftrightarrow (\Box p \rightarrow q)$	$p = \Box q \rightarrow q$

当模态方程的主体中有 p 的多重出现时将引出较复杂的递归。明显的解则是通过适当地迭代单个步骤情形而得。

定理 8 有两个方向：①所定义的新谓词的存在性和唯一性，和②那个谓词在模态基本语言中的显式可定义性。这里，谓词 p 的存在性和唯一性正好是良基序上所有递归定义的一个一般性质。但是我们也得到了具体信息：这个递归谓词可以在最初的模态语言中找到定义，无须借助明显的 μ-算子或 ν-算子。我们现在对此与 μ-演算进行比较。

2.4.2　可证性不动点和 μ-演算

我们可以明确地把 2.3 节的一般逼近过程跟刚才说的特定目的算法进行比较。作为一个出发点，显然，p 在 φ 中仅有带正的方块号出现的定义 $\mu p.\varphi(p)$ 同时属于这里提到的两种方法。

例 13　模态方程 $p \leftrightarrow \Box p$ 的不动点

这里，集合算子 $F_{\neg \Box p}$ 的逼近序列并不能产生不动点，它总是在游移不定。例如，在模型（$\mathbb{N}$，$<$）中，我们得到 $\varnothing$，$\mathbb{N}$，$\varnothing$，$\mathbb{N}$，…。

实际上，一般不动点逻辑中的情景更为复杂。含有正、负混合出现的公式有时毕竟还是可以允许的。

例 14　正、负混合出现的公式 $p \leftrightarrow (p \vee \neg \Box p)$。

在这一情形下，逼近序列将是单调非降的，原因在于起首的那个析取支 p。所以，在任意一个模型中，必定有一个最小的不动点。与我们的公式 $p \leftrightarrow (p \vee \neg \Box p)$ 一起，这个序列稳定于阶段 2，产生 $\Diamond \top$。还存在一个最大的不动点，也就是由 $\top$ 定义的整个集合。

这一情形超出定理 8，因为 p 在 $p \vee \neg \Box p$ 中的第一个出现不带方块号。的确，在这一扩充的版式下并不存在唯一的可定义性，因为最小不动点和最大不动点在这里是不同的。在不动点逻辑中，这个例子为单调情形的一个推广提供了动机（Ebbinghaus，et al，1995）。

定义 6　任意一个对 p 的出现无句法限制的公式 $\varphi(p, q)$ 的膨胀不动点都是

用上述序数逼近序列来计算的，不过现在是在后继步骤处实施上方累积：

$\varphi^{\alpha+1}=\varphi^{\alpha}\cup\varphi(\varphi^{\alpha})$，然后再在极限序数处取并。

不存在任何保证，保证这序列稳定时的集 P 一定是模态公式 $\varphi(p,q)$ 的不动点，倒不如说它是修正公式 $p\vee\varphi(p,q)$ 的不动点。不过，代替膨胀不动点，我们也可以采用其他限制约定，例如古普塔和赫兹伯格型的限定上确界和限定下确界（Visser，1984）。

2.4.3　两种不动点的组合

比较也可以意味着组合。把一般单调不动点附加到可证性逻辑能否扩大德漾-桑宾结构的作用范围？回答是否定的。

事实 18　任意一个 p-正公式 $\mu p.\varphi(p)$，其中 $\varphi(p)$ 可能含有 p 的不带方块号的出现，都等值于一个使 p 的所有出现都带方块号的公式。

证明： 不失一般性，我们可以取该公式为形如 $\mu p.(p\wedge A)\vee B$ 的公式，这里 p 在 A，B 中只有带方块号的出现。

令 φ^{α} 是 $\varphi=((p\wedge A)\vee B)$ 的逼近序列，并令 B^{α} 是由公式 B 单独实施的这样一个序列。那么我们有下述坍塌：

引理 1　对一切序数 α 有 $\varphi^{\alpha}=B^{\alpha}$。

证明： 用归纳法证明。零和极限序数时，结论显然成立。其次，我们注意到

$$\begin{aligned}\varphi^{\alpha+1}&=(\varphi^{\alpha}\wedge A(\varphi^{\alpha})\vee B(\varphi^{\alpha})\\&=(B^{\alpha}\wedge A(B^{\alpha})\vee B(B^{\alpha})\end{aligned}$$

这里，据 F_B 单调这一事实可知 $B^{\alpha}\subseteq B(B^{\alpha})$，从而 $B^{\alpha}\cap A(B^{\alpha})\subseteq B(B^{\alpha})=B(B^{\alpha})=B^{\alpha+1}$。

因此，同一个不动点是由方块公式 $\mu p.B$ 来计算的。■

上面的事实直接由此引理得出。■

维施尔注意到，关于不动点的存在性我们的论证还建立了一个更清楚的结果：

任意一个使 p 在其中的每一个出现或是正的，或是带方块号的公式 $\varphi(p)$ 一定有极小不动点。

下一个问题是，我们能使德漾-桑宾递归适应于一般不动点逻辑吗？回想一下，良基关系有一个归纳特征：它们的定义域是由 $\mu p.\Box p$ 定义的最小不动点。在这样的序上，整个论域最终是通过模态公式 $p\leftrightarrow\Box p$ 的单调递增序数阶段来计算的：

$$D^{0},\ D^{1},\ \cdots,\ D^{\alpha},\ \cdots$$

现在，对定理 8 中不动点公式 $\varphi(p, q)$，我们不能做类似的累积阶段的计算，因为 φ 也许会同时含有命题字母 p 的正出现和负出现。但是我们可以定义（上面定义的）膨胀不动点的相关的单调序列。正如我们提到的，这个膨胀过程本质上不一定导致 $\varphi(p, q)$ 的不动点。但是这一次，在 D-层级中存在单调增长，因为 φ 在它的阶段内趋于稳定。

事实 19 $\varphi^{\alpha+1}\cap D^{\alpha}=\varphi^{\alpha}\cap D^{\alpha}$

因此，当限制于良基论域的逼近阶段时，解德漾 - 桑宾方程的一般不动点过程将单调地运行。这一断定的结果对于上述模态例子，$\Box p$，$\neg\Box p$ 和 $\Box p\to q$ 都成立。这里我们不给出证明，因为我们想要以一种稍微不同的方式来重新描述这一情景。

定理 9 德漾 - 桑宾不动点可以用下述联立膨胀归纳定义来给出：

$r\leftrightarrow\Box r$,

$p\leftrightarrow\Box r\wedge\varphi(p, q)$。

证明：我们联立计算 p，r 的逼近阶段：

$$(r^{\alpha+1}, p^{\alpha+1}) = (\Box r^{\alpha}, \Box r^{\alpha}\wedge\varphi(p^{\alpha})) \qquad \text{后继序数时，}$$

$$(r^{\lambda}, p^{\lambda}) = (\cup_{\alpha<\lambda} r^{\alpha}, \cup_{\alpha<\lambda} p^{\alpha}) \qquad \text{极限序数时。} \blacksquare$$

这里 p 的合取支 $\Box r$（而不是“r”）保证 p 的下一阶段是参照着 r 的新值来计算得到。现在只需证明逼近阶段之间的下述关系成立即可——下面有些记号混用。

引理 2 如果 $\beta<\alpha$，那么 $p^{\alpha}\wedge r^{\beta}=p^{\beta}$。注意，这个引理蕴涵单调性：若 $\beta<\alpha$，则 $p^{\beta}\to p^{\alpha}$。

证明：这里，主归纳最好是在 α 上进行，以 β 上的归纳为辅。0 和极限序数的情形都是显然的。对于后继序数步骤，我们需要两个辅助事实。尽管我们只用到传递关系，但还是就任意关系来陈述这两个事实。第一个事实是模态公式对生成子模型不变，而第二个事实则是 r 的逼近过程的一个直接结论：

（1）$M, P, x\models\varphi(p)$，当且仅当 $M, P\cap R^{*}[x], x\models\varphi(p)$；

（2）令 $R^{*}x$ 是由所有从 x 经某个有穷而非零多个 R-步骤可达的点所组成的。若 $x\in r^{\alpha}$，则 $R^{*}x\subseteq\cup_{\beta<\alpha} r^{\beta}$。

现在我们来计算——同样以有益的记号混用来书写：

$x\models p^{\alpha+1}\wedge r^{\beta+1}$

当且仅当，$x\models r^{\alpha+1}\wedge\varphi(p^{\alpha})\wedge r^{\beta+1}$

当且仅当，$x\models\varphi(p^{\alpha})\wedge r^{\beta+1}$

当且仅当，$x\models\varphi(p^{\alpha}\wedge r^{\beta})\wedge r^{\beta+1}$ ［据（1）和（2）］

当且仅当，$x\models\varphi(p^{\beta})\wedge r^{\beta+1}$ （据归纳假设）

当且仅当，$x\models p^{\beta+1}$ $\blacksquare$

2.4.4　为什么是显式可定义的？

我们的μ-演算并没有解释可证性不动点为什么在基本模态语言中显式可定义的。的确，一般理由似乎还未为人所知。我们知道的是，这一显式可定义性现象并非模态语言所特有的：

定理 10　使 p 的所有出现都在某个算子辖域中的不动点方程的显式可定义性，对于所有带有作用与满足下述条件的世界集上的广义量词 Qp 的命题语言也都成立：

（1）= 上面的（1）：$Q(P)$在 x 处为真，当且仅当，$Q(P\cap Rx)$在 x 处为真；（局部性）

（2）$Qp\rightarrow\Box Qp$　（遗传性）

这包括诸如下一类的量词：模态逻辑中的“在某个后继处”、真正一阶逻辑中的“在至多五个后继处”或者二阶逻辑中的“在每个后继的大多数后继处”。（van Benthem，1987）中有定理 10 的一个证明，是在 1985 年前后跟德漾合作时给出的。

但是显式可定义性的一般理论基础我们仍摸不透。除了恰当的基础量词 Q 之外还有一个因素是可及关系的传递性。例如，哥德尔方程 $p\leftrightarrow\neg\Box p$ 在带直接后继的有穷树上没有任何显式模态解。但是，就一般的不动点逻辑来说，定理 6 在可证性逻辑中的成功仍可能有较深的模型论理由。下面是一个可作参考的观察结果。如果一阶公式 $\varphi(P)$蕴涵 P 的一个显式定义，则它的最小不动点和最大不动点重合。而且它的逆也成立，直接诉诸贝特定理就可得到（Smorynski，1984）。据巴威斯－莫斯克瓦基斯定理可知（这一结果归功于马丁・奥托），对于唯一的一阶不动点而言这样的现实一阶定义甚至在每一个计算它们的模型中都可由某个固定的有穷逼近阶段统一地产生。

注记 5　解不动点方程的侯另一种模态形式系统

维施尔和达戈斯蒂诺建议用来自（Hollenberg，1998）的想法，尤其是μ-演算的一致内插和跟所谓的双模拟量词相联系的语言，来分析可证性逻辑中的显式可定义性。

2.4.5　已出版的附加材料：再论可证性逻辑和μ-演算

在回应本文早期说法（它的 ILLC 预印本早在 2005 年就已开始流传）中，论文（Visser，2005）取得了许多实质性的进展。维施尔把 2.4.1～2.4.3 节中的各种各样观察结果基本上汇集成了下面的这个大结果：

定理 11　μ-演算可以在洛伯逻辑中得到解释。

精致的证明包含对解释类型的使用。也已表明，μ-演算中来自可证性逻辑的上述解释，和维施尔定理的逆撤销了各种模型论性质的保持。即使如此，似乎也并不存在一个从μ-演算到洛伯逻辑内的忠实嵌入。或者说，即使有，也一定是有点不标准的，其中可满足性的复杂性在两种情形下是不同的：对于后者而言是 Pspace 完全的，而对于前者则是指数时间完全的。

2.5 高阶方向

前面章节中的许多课题暗示着进一步向二阶逻辑的推广，这是被解释为一元Π_1^1-语句的模态公式框架真值的自然所在。例如，基本模态逻辑的萨奎斯特定理也对任一高阶逻辑中带正前件的公式行得通（van Benthem，1999）。尤其是，对于在 2.4 节讨论产生的模态不动点背后的、适当的二阶逻辑片段也许会有贝特定理。van Benthem（1983）和 ten Cate（2005）把模态逻辑作为一种寻求举措得当的二阶逻辑片段的方法来研究。这似乎是另一条有意义的路可走。

2.6 结束语

本文已表明（因洛伯公理而突现出来）可证性逻辑的种种方面如何在模态逻辑和经典逻辑中提出一个更加宽广的背景，以不动点语言为一条绵延不绝的线索。在我们学生时期后的 30 年来，我们模态方块号的内涵即使在很熟悉的背景下迄今也还未被彻底弄清！

参考文献

Aczel P. 1977. An Introduction to Inductive Definitions. In：Barwis J，ed. *Handbook of Mathematical Logic*. North-Holland，Amsterdam，739～782

Bezem J-W，de Vrijer R. eds. 2003.（"Terese"）*Term Rewriting Systems*，Cambridge Tractsin Theoretical Computer Science，Vol. 55，Cambridge University Press

Blackburn P，de Rijke M，Venema Y. 2001. *Modal Logic*. Cambridge University Press

Blok W，van Benthem J. 1978. Transitivity Follows from Dummett's Axiom. *Theoria*，44（2）：117～118

D'Agostino G，Hollenberg M. 2000. Logical Questions Concerning the μ-Calculus：Interpolation，Lyndon & Los-Tarski. *Journal of Symbolic Logic*，65：310～332

D'Agostino G，van Benthem J，Montanari A，Policriti A. 1997. Modal Deduction in Second-Order Logic and Set Theory. Part I. *Logic and Computation*，7：251～265

Ebbinghaus H-D，Flum J. 1995. *Finite Model Theory*. Springer，Berlin

Gabbay D，Ohlbach H-J. 1992. Quantifier Elimination in Second-Order Predicat Logic. *South African*

Computer Journal, 7: 35 ~ 43

Goranko V, Vakarelov D. 2003. Elementary Canonical Formulas I. Extending Sahlqvist's Theorem. Department of Mathematics, Rand Afrikaans University, Johannesburg & Faculty of Mathematics and Computer Science, Kliment Ohridski University, Sofia

Harel D, Kozen D, Tiuryn J. 2000. *Dynamic Logic*. The MIT Press, Cambridge (Mass.)

Hollenberg M. 1998. *Logic and Bisimulation*. Dissertation Series. Vol. XXIV, Zeno Institute of Philosophy, University of Utrecht

Nonnengart A, Szalas A. 1999. Fixed-Point Approach to Second-Order Quantifier Elimination with Applications to Modal Correspondence Theory. *In*: Orlowska E. ed. *Logic at Work*. Physica-Verlag, Heidelberg, 89 ~ 108

Sahlqvist H. 1975. Completeness and Correspondence in First and Second Order Semantics for Modal Logic. *In*: Kanger S. ed. *Proceedings of the Third Scandinavian Logic Symposium*, Amsterdam, NorthHolland, 110 ~ 143

Smorynski C. 1984 Modal Logic and Self-Reference. *In*: Gabbay D, Guenthner F. eds. *Handbook of Philosophical Logic*, Vol. II. Reidel, Dordrecht, 441 ~ 495

Ten Cate B. 2005. *Model Theory for Extended Modal Languages*. ILLC Dissertation Series DS-2005-01, University of Amsterdam

van Benthem J, van Eijck J, Kooi B. 2005. Logics for Communication and Change. *In*: van der Meijden R. ed. *Proceedings of TARK* 2005, National University of Singapore

van Benthem J, van Otterloo S, Roy O. 2005. Preference Logic, Conditionals, and Solution Concepts in Games. *Modality Matters*: *Festschrift for Krister Segerberg*, University of Uppsala

van Benthem J. 1974. Some Correspondence Results in Modal Logic Report 74 – 05. Mathematisch Instituut, Universiteit van Amsterdam

van Benthem J. 1983. *Modal Logic and Classical Logic*. Bibliopolis, Napoli

van Benthem J. 1987. Toward a Computational Semantics. *In*: Gardenfors. ed. *Generalized Quantifiers*: *Linguistic and Logical Approaches*. Reidel, Dordrecht, 31 ~ 71

van Benthem J. 1999. The Range of Modal Logic. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 9 (2 ~ 3): 407 ~ 442

van Benthem J. 2005. Minimal Predicates, Fixed-Points, and Definability. *Journal of Symbolic Logic*, 70 (3): 696 ~ 712

Venema Y. 1991. *Many-Dimensional Modal Logics*. Dissertation, Institute for Logic, Language and Computation, University of Amsterdam

Visser A. 1984. Semantics and the Liar Paradox. *In*: Gabbay D, Guenthner F. eds. *Handbook of Philosophical Logic*, Vol. IV. Reidel, Dordrecht, 617 ~ 706

Visser A. 2005 Löb's Logic Meets μ-Calculus. Philosophical Institute, University of Utrecht. To appear in Liber Amicorum for Jan-Willem Klop

3 事情总要翻过来看![1]

3.1 引　言

19 世纪的几何学家雅可比有一句著名的话：我们总应当尝试颠倒每一个几何定理。但是，这一忠告的适用范围更为广泛！选取任意一个关系框架类，我们可以研究它的有效的模态公理。但是现在翻过来看，事先固定某个模态公理，然后通过“模态对应”分析能找到保证该公理在其中成立的框架类。这种风格的分析看上去仿佛受束缚于一种特殊的语义，比方说关系框架——但事实并非如此。对应分析也在邻域模型上起作用，例如，它告诉我们哪些模态公理正好使这些关系框架坍塌成二元关系框架。本文将要表明，上面这种同样风格的逆向思维如何也适用于关于信息改变的现代动态逻辑。关于信息更新！A 后的知识的基本公理告诉我们，为了把一个给定的模型 $\boldsymbol{M}$ 更新成一个接纳 A 的新模型我们必须使用哪种运算。同样，本文还要表明，关于修正行为 $^*A$ 后仍成立的（条件）信念模态公理实际上是一个特殊的运算在改变行为主体在可能世界论域上所拥有的相对合理性序。最后，回到逻辑的传统的核心地带，本文要表明我们如何能把标准的谓词逻辑公理看成是关于那种位于一阶语义核心的抽象“进程模型”的限制条件，对此有适当的理解。在所有这些情形下，为了使逆向结果起效并阐明一个给定的主题，我们必须返回去重新考虑标准的模型方法。但我认为，那也正是夏希德·拉赫曼（Shahid Rahman）做的事情。

---

① Manmuss Immer Umkehren! *In*: Dégremont C, Keiff L, Rückert H, eds. *Dialogues, Logics and other Strange Things. Essays in honour of Shahid Rahman*, College Publications, London, 2008.

3.2　标准模态框架对应

模态逻辑语义的最有吸引力的一个特征是模态公理和世界间可及关系中的对应模式之间的匹配。这可以通过给出一个模型类（比方说时序的或认知的模型类），然后再公理化它的模态有效公式集来看出。除了对所有情形都成立的极小逻辑，增加公理可以反映较特殊的结构。关于模态完全性理论和本文其余部分的一般背景，读者可以参考《模态逻辑手册》（Blackburn，van Benthem & Wolter，eds.），此手册已于 2006 年由阿姆斯特丹的埃斯菲尔科学出版社（Elsevier Science Publishers，Amsterdam）出版。

作为完全性理论的一个对位理论，模态对应理论的要点就在于，我们也能倒转这一思考路线（van Benthem，1983）。我们取某个其有效性有待得到保证的、有趣的模态公理，接着找出必须假定的可及性关系模式。为了理解这一点，考虑我们熟悉的模态 K4-公理 $\Box p\rightarrow\Box\Box p$。假定我们称一个模态公式在一语义框架 $\boldsymbol{F}=(W,R)$ 中的一点 s 处为真，是指它在 $\boldsymbol{F}$ 上的所有原子赋值 V 下都在 s 处为真。下述事实或许是所有对应之母：

事实 1　$\boldsymbol{F},s\models\Box p\rightarrow\Box\Box p$，当且仅当，$\boldsymbol{F}$ 的可及关系 R 在 s 处是传递的，即，

$$\boldsymbol{F},s\models\forall y(Rxy\rightarrow\forall z(Ryz\rightarrow Rxz))。$$

证明：如果此关系是传递的，则 $\Box p\rightarrow\Box\Box p$ 显然在每一个赋值下都成立。逆之，令 $\boldsymbol{F},s\models\Box p\rightarrow\Box\Box p$。特别有，当我们取 $V(p)$ 为 $\{y\mid Rsy\}$ 时 K4-公理将成立。但是另一方面，前件 $\Box p$ 在 s 处成立，因而后件也在 s 处成立。而据 $V(p)$ 的定义可知，后面这个结论陈述的就是传递性。■

这个例子背后的理论涉及萨奎斯特定理（van Benthem，1983；Sahlqvist，1975）：对 T，S4 和 S5 的公理进行概括，对所有具有恰当句法形式的公理都可以作系统的一阶翻译。作为一个有益的副效应，角度的倒转也使我们对熟悉的模态公理作不同的考察，并且看到以前从未注意的模式！一个著名的非－萨奎斯特原理是洛伯公理 $\Box(\Box p\rightarrow p)\rightarrow\Box p$，它表达算术可证性逻辑的一个基本原则。它表达的是可及性模式的一个有意思的高阶特征：

事实 2　洛伯公理在一框架 $\boldsymbol{F}=(W,R)$ 中的 s 处为真，当且仅当

（1）$\boldsymbol{F}$ 在 s 处是向上 R-良基的，并且

（2）$\boldsymbol{F}$ 在 s 处是传递的。

其中，如果关系 R 在 s 处没有向上的序列 $sRw_1Rw_2Rw_3\cdots$，即，从 s 处出发没有无穷或环序列，则称关系 R 是向上良基的。如今，对应理论仍生机勃勃不断发展

着。(van Benthem. 2005，2006A）表明洛伯公理如何导致对 LFP(FO)中可定义可及关系的结构性质的一个系统分析，这里 LFP(FO)是指带不动点算子的一阶逻辑。因此，我们也能用新方法来分析熟知的像模态 μ-演算那样的模态不动点语言。但是其他的模态公理定义的可及性模式仍超出这一层次，以麦肯西公理 $\Box\Diamond p \rightarrow \Diamond\Box p$ 为首要例子。

3.3　模态分配和邻域模型

有些人认为对应分析仅仅局限于一种特殊的、要求模态模型一定要像什么样（即有向图）的观点。但是事实上它将在任一种结构上起作用，即使看上去像是“高阶的”结构也是如此。例如，Rodenburg（1986）表明，我们可以在贝特模型上对直觉主义公理进行对应分析，取点和分枝为初始对象。下面是一个较接近于模态逻辑本身的例子（van Benthem，1992；1996B：第 11 章）。邻域模型通过采用使点跟点集相连的可及关系 RxY 推广了有向图。在逻辑程序、空间的拓扑语义及模态逻辑，或者关于玩家在博弈中获取结果的能力的模态逻辑中，这些结构都在“演绎支持”方案中有具体的动机。于是我们可以推广常用的真值条件来解释主要的模态词：

$$\boldsymbol{M}, s \models \Diamond\varphi, \text{当且仅当，存在一个点集 } Y \text{ 满足 } RsY \text{ 并对所有 } y \in Y, \text{ 有 } \boldsymbol{M}, s \models \varphi。$$

在所产生的极小逻辑中模态词不是对于合取就是对于析取不再具有分配性，尽管向上的单调性仍然成立（这里的技术原因在于，上面的真值条件中量词 $\forall\ \exists$ 的组合抑制了分配律）。而且，它的 SAT 复杂性从模态 K 的 Pspace 完全的下降到 NP-完全的：即“从更坏到坏”。但是，这个到一般语义的转换意味着，以往极小有效的原则现在获得了实质的内容。尤其是，我们有下面的简单事实。

事实 3　分配公理 $\Diamond(p \vee q) \leftrightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q)$ 在一框架上有效，当且仅当，该框架由一个满足 RxY 的二元关系 Rxy 生成，当且仅当，$\{y \mid Rxy\} \subseteq Y$。

van Benthem（1992）较详细地研究了邻域框架上的对应，并且为主要的模态原则（例如上述的 K4-公理）的对应理论内容找到了适当的推广。看 K4-公理的特称模态词表述：

事实 4　$\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$ 对应于一个切割规则（“广义传递性”）：

$\forall x \forall Y \forall \{Z_y \mid y \in Y\}$：$(RxY \wedge (\text{对一切 } y \in Y RyZ_y)) \rightarrow Rx \cup \{Z_y \mid y \in Y\}$。

正如在有向图上那样，这样的对应可以由一个代入算法来自动地算出（Blackburn et al.，2000），这一次，在二阶逻辑的一个弱的子语言中得到关系条件。

3.4 几何：双种类模态逻辑

“在方块号外”（out of the box）进行对应思考的另一个源头是在几何中。(van Benthem. 1996A，1999）为关于空间的多种类观点做了一个辩解，他认为点和直线，或者点和箭头，处于同等地位。匹配的模态语言现在将是双种类的：用一种公式来指点，另一种公式指线或箭头。当然，关系可以有多种类型，不仅仅是原来仅就世界而言的可及性观念。最后得到的模态几何在模态公理和空间模式之间有着动人心弦的具体对应。下面我们给出两个例子。

考虑模态箭头逻辑，一种将点及点之间的转变描述成一阶语义公民的双种类语言。我们这里集中讨论后者。基本箭头模型具有形式 $M=(A, C^3, R^2, I^1, V)$，以 A 为“箭头”集并带有三个谓词：C^3x, yz（x 是 y，z 的复合），R^2x, y（y 是 x 的逆），I^1x（x 是恒等箭头）。此模态语言的解释用到下述两个关键条款：

$\boldsymbol{M}, x\models\varphi\cdot\psi$，当且仅当，存在 y，z 使得 Cx, yz，并且 $\boldsymbol{M}, y\models\varphi$，$\boldsymbol{M}, z\models\psi$；

$\boldsymbol{M}, x\models\varphi^{\cup}$，当且仅当，存在 y 使得 Rx, y，并且 $\boldsymbol{M}, y\models\varphi$。

下面是取自塔尔斯基关系代数的、关于逆和复合的两个著名原则，可以重述为箭头逻辑的模态公理：

事实 5

$(\varphi\cdot\psi)^{\cup}\to\psi^{\cup}\cdot\varphi^{\cup}$ 对应于 $\forall xyz$：$Cx, yz\to Cr(x), r(z)r(y)$

$\varphi\cdot\neg(\varphi^{\cup}\cdot\psi)\to\neg\psi$ 对应于 $\forall xyz$：$Cx, yz\to Cz, r(y)x$

给定这些关系性质，我们可以把复合运算看做是一个由任意箭头取逆得到的三角形，如图 1：

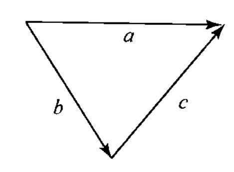


图1 箭头复合

基本箭头逻辑是可判定的。但是结合性的存在原则使这些逻辑成为不可判定的，祸起于此，正如关系集合代数一样：

事实 6 结合公理 $(\varphi\cdot\psi)\cdot\chi\to\varphi\cdot(\psi\cdot\chi)$ 对应于 $\forall xyzuv$：$((Cx, yz \& Cy, uv)\to\exists w$：$(Cx, uw\to Cw, vz))$

这说的是，结构必须丰富到足以允许“重新组合”。

不管复杂与否，从一个几何的观点来说上面的公理同样有吸引力。我们的第二个例子来自空间模态逻辑（Aiello & Benthem, 2003）。下面的事实是我们的对应分析移到几何模态逻辑上时结合公理所说的内容，在这一类逻辑中那个三元关系现在当然代表介于（betweenness）这一仿射关系 Bx, yz：x 在线段 y-z 上。我们利用下述模态词：

$M, s \models C\varphi\psi$，当且仅当，$\exists t, u$：$Bs, tu$ & $M, t \models \varphi$& $M, u \models \psi$。

事实 7 结合律 $C(C\varphi\psi)\chi \to C\varphi(C\psi\chi)$ 对应于帕施公理

$$\forall xyzuv: ((Bu, yx \ \& \ Bv, uz) \to \exists s: (Bv, xs \to Bs, yz))$$

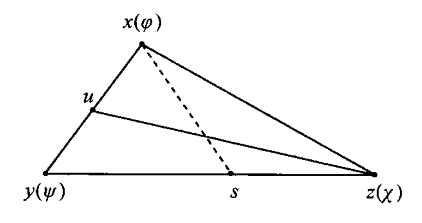


图 2 帕施三角形公理

因此，依赖于语义环境，对应分析可以揭示众所周知的模态原则的完全不同的内容，以令人意外的方式把它们跟来自其他方面的数学结构连接起来。现在让我们转到其他地方。

3.5 知识和信息更新

模态逻辑的另一个范例是关于知识及其他跟信息相关的态度的分析。这里，模型代表描述一个或多个主体的当前状态的信息模式。像往常一样，模态语言为：$p \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \psi \mid K_i\varphi$ 或许再加上共知 $C_G\varphi$，而模型 $M = (W, \{\sim_i \mid i \in G\}, V)$ 则有世界集 W、可及关系 $\sim_i$ 和一个赋值 V。标准的认知真值条件读成：$M, s \models K_i\varphi$ 当且仅当对一切满足 $s \sim_i t$ 的 t 有 $M, t \models \varphi$。常用的模态框架对应对知识模态词和共同知识模态词都适用，后者被处理为 3.2 节意义上的一个不动点。至此一切都好。

但是现在考虑一种现代倾向，关于改变当前认知模型的信息活动的分析 (van Benthem，2006B)。例如，一个公开宣告！P 如下起效：接受信息 P 消除使 P 为假的世界。见图 3：

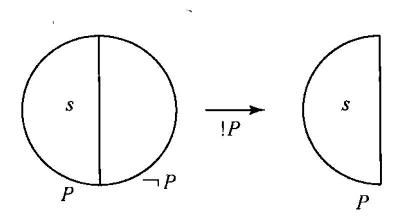


图 3 消去式修正步骤

为了描述这一切，我们需要一个*动态认知逻辑*以及一个重要的算子：

$$\boldsymbol{M}, s \models [!P]\varphi\text{，当且仅当，若}\boldsymbol{M}, s \models P\text{，则}\boldsymbol{M}|P, s \models \varphi\text{。}$$

这个逻辑可以完全公理化。特别是，有一个复合的定律解释在公开宣告某个“硬事实”P后主体何时获得知识：

事实8　下述模态公理对于公开宣告是有效的：

$$[!P]K_i\varphi \leftrightarrow (P \rightarrow K_i(P \rightarrow [!P]\varphi))\text{。}$$

理解得当，这公理表达有关认知主体的足道的假设。特别是，知识和观察到的事件可以交换意味着主体具有*完美记忆*的能力。在下述论证中的确预设了这一点：

证明：比较两个模型（$\boldsymbol{M}$, s）和（$\boldsymbol{M}|P$, s）信息更新前后的情形，画个图较有帮助。公式$[!P]K_i\varphi$说的是，在$\boldsymbol{M}|P$中，所有从$s\sim_i$-可及的世界都满足φ。$\boldsymbol{M}$中与之相配的世界就是那些*满足*$\boldsymbol{P}$而又从$s\sim_i$-可及的世界。此外，公式的真值可以在一个更新步骤中发生变化，比方说从无知变成有知。因而对$\boldsymbol{M}$中这些世界的正确描述并非是它们满足φ（这是它们在$\boldsymbol{M}|P$中做的），而更确切地说是它们满足$[P!]\varphi$：它们在更新后成为φ。最后，讲一个小的细节。$!P$是一个部分运算，因为P必须要对它的符合实际的公开宣告为真。因此，仅当$!P$可实施时（即P真时）才在右方作我们的断言。合起来则是，$[P!]K_i\varphi$所说等价于$P \rightarrow K_i(P \rightarrow [P!]\varphi)$——这也可以简化成上述形式$P \rightarrow K_i[P!]\varphi$。 ■

画图在这里的用处并非只是一种方便。这些图也反映了有关某种可被称为*知识和更新的几何*的东西的直觉。

不过现在，要再次提出雅可比的忠告。我们已经看到，把关于硬事实的公开宣告处理成世界消除将使上述公理有效。反过来的情形又将如何。假定这公理看上去对于信息更新是独立地合理的，那么什么样的模型运算会使它有效呢？答案又是一个对应论证（van Benthem，2007）。我们考虑抽象的模型改变运算♥p，它把包含世界集p在内的认知模型变成新的模型M♥p——同时对域中可取的世界设定某个适当的条件。下面的一个简单证明将表明这一点：

事实9　消去式更新是仅有的能满足等值式$[♥p]Kq \leftrightarrow (p \rightarrow K(p \rightarrow [♥p]q)$的模型改变的运算。

证明：假定世界s在p中：否则♥p在$\boldsymbol{M}$, s中不会被定义。首先，从左至右，该公式蕴涵下述陈述。取q为由所有那些从当前世界s在集合p内可及的世界所组成的世界集。另外假定世界s是在p中的。那么等值式右侧说的是，所有（在运算♥p后从s可及的）世界仍在q中，即它们以前就是在p中的，并且它们都是p的成员。因此，关系改变仅留下已经存在的从p-世界到p-世界的链接。相反的方向上有类似的论证，我们的确可以看到，所有这样的链接在运算♥p后都保持进了新模型：没有产生新的链接。综上所述，这正好就是以前所描述的那个

认知更新的链接切割（link-cutting）说法。 ■

这个论证还可以得到强化，我们可以明确地定义相关的认知框架的论域和转换关系，设定单个的世界如何跨框架被联系起来。在这样一种背景下，有三个公理就可以刻画就公开宣告而言的更新消除。

首先，等值式 $\langle !p\rangle T \leftrightarrow p$ 保证在一个给定的模型 $\boldsymbol{M}$ 内，幸存于 $\boldsymbol{M}\spadesuit p$ 中的世界仅有 p 所指集合中的那些世界。其次，对于特称模态词 Eq（"q 在某个世界中成立"）而言有一个归约公理 $\langle !p\rangle Eq \leftrightarrow p \wedge E\langle !p\rangle q$，它说的是 $\boldsymbol{M}\spadesuit p$ 的个体域不含有 $\boldsymbol{M}$ 中集合 p 之外的对象。最后，上述关于知道的公理保证 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{M}\spadesuit p$ 的认知关系相同，以致我们的更新运算实际上取的是子模型。

这个例子表明，模态的对应分析可以运用到动态认知逻辑的研究领域，用来分析含有信息的事件族，包括部分观察和隐匿信息的事件。尤其是，我们想要表明，就这一类较复杂方案而言，（Baltag，Moss & Solecki. 1998）的基本乘积更新是某个适当的抽象空间中仅有的能满足一般 DEL 归约公理 $[E, e]K_i\varphi \leftrightarrow (PRE_e \rightarrow \wedge \{K_i[\boldsymbol{E}, f]\ \varphi \mid$ 在 A 中，$f \sim_i e\})$ 的模型构造。

3.6 信念修正的几何

人们并非简单接受信息，顺利地更新他们的当前知识。还有一些关于事实的更戏剧化情景，它们挑战我们当前的信念，并导致信念修正动态过程。在这里，可以借用上面提到的方法。信念可以被解释为在模态模型世界间的一个相对合理性。最关键的模态词的真值定义为：

$\boldsymbol{M}, s \models B_i\varphi$，当且仅当对所有在序 $\lambda xy. \leqslant_{i,s} xy$ 下极小的世界 t 有 $\boldsymbol{M}, t \models \varphi$。

但立刻可见，这一模态词不能满足我们的需要——而更为一般的条件信念能帮助我们"预编码（pre-encode）"在学习某些事物时应当有的信念：

$\boldsymbol{M}, s \models B_i(\varphi/\psi)$，当且仅当对集合 $\{u \mid \boldsymbol{M}, u \models \psi\}$ 中所有关于 $\lambda xy. \leqslant_{i,s} xy$ 为极小的世界 t，有 $\boldsymbol{M}, t \models \varphi$。

所得到的逻辑就是极小条件句逻辑的标准原则。就第 5 节的"硬事实"而论，容易看到下述公理成立：

$$[!P]B_i(\varphi/\psi) \leftrightarrow (P \rightarrow B_i([!P]\varphi/P \wedge [!P]\psi))$$

但更有意思的却是主体对"软触发"（soft triggers）的反应。这类事件提高一个命题的合理性，而不会明确消除命题为假的世界。这样的触发不会消除世界，而是会改变合理性模式。

对这类变化的一个典型的反应是词典的升级 $\Uparrow P$，这被看做是一个信赖他人

的，或一个理性的主体所可能做的事情。这将使当前模型 M 改变成 $M\Uparrow P$：

P-世界变得比 $\neg P$-世界更好；在 P 和 $\neg P$ 区域内，原来的序保留不变。

对这一模型改变运算的完全的动态逻辑可以得到公理化——先把下面这个相匹配的模态词引入到语言中来：

$$M, s \models [\Uparrow P]\ \varphi \text{ 当且仅当 } M\Uparrow P, s \models \varphi$$

然后，下面的关键原则是描述主体在就某个软触发 P 实施词典合理性改变之后所拥有的条件信念：

$$[\Uparrow P]B(\varphi/\psi) \leftrightarrow (E(P\wedge[\Uparrow P]\psi)\ \wedge B([\Uparrow P]\varphi/P\wedge[\Uparrow P]\psi))$$
$$\vee\neg\ (E(P\wedge[\Uparrow P]\psi)\ \wedge B([\Uparrow P]\varphi/[\Uparrow P]\psi))$$

这里，E 还是那个全局的特称模态词——或者说是一个类似的认知模态词。这里，我们不会深入研究其可靠性论证的细节。但我们注意到，推广对信息更新所作的分析就能证得一个精美的模态对应结果，说明我们已经抓住了它的本质。另外，我们是在一个由抽象关系改变运算 $\heartsuit p$ 联系起来的框架论域中进行工作。

事实 10　公式 $[\heartsuit p]B(q/r) \leftrightarrow (E(p\wedge r)\wedge B(q/p\wedge r)\ \vee(\neg\ (E(p\wedge r)\wedge B(q/r))$ 在一个框架论域中成立当且仅当运算 $\heartsuit p$ 是辞典编纂升级。

证明：令 $\leqslant_s xy$ 在 $M\heartsuit p$ 中。我们证明 $\leqslant_s$ 是由词典升级产生的关系。令 r 是集合 $\{x, y\}$ 和 $q=\{x\}$。那么我们的公理的左侧成立。右侧有两种情形。情形 1：x，y 之一是在 p 中的，从而有下面三种情形：① $p\wedge r=\{x, y\}$；或② $\{y\}$；或③ $\{x\}$。而且，$B(q/p\wedge r)$ 在 M 中的 s 处成立。若是①，则我们在 M 中有 $\leqslant_s xy$。若是②，则我们必定有 $y=x$，$\leqslant_s xy$ 还在 M 中。情形③仅当 $x\in p$ 且 $y\notin p$ 时才出现。因此，$M\heartsuit p$ 中所有新的关系对都满足词典新序的描述。情形②是在我们有 $\neg(E(p\wedge r)$ 且 x，y 中没有一个在 p 中时的情形。这可以类似地进行分析，利用析取支 $B(q/r)$ 的真值。

反过来，我们证明所有满足词典更新描述的关系对都成为新的序。这里举一个例子；其他情形是类似的。假定 $x\in p$ 而 $y\notin p$。则 $p\wedge r=\{x\}$。其次，设 $r=\{x, y\}$ 和 $q=\{x\}$。那么我们有 $B(q/r)$，理由微不足道，于是左侧的公式 $[\spadesuit p]B(q/r)$ 也成立，因为我们假定我们的公理对命题字母 q，r 的任意解释都成立——而且它也告诉我们，在模型 $M\spadesuit p$ 中，$\{x, y\}$ 中最好的世界是在 $\{x\}$ 中的：即，$\leqslant_s xy$。 ■

另外，van Benthrm（2007）实际上更为细致地分析了这里的技术细节。

在信念修正的范围内，这样的对应分析具有进一步的吸引力，因为没有一个单独的合理性改变行动可以一劳永逸地起效。例如，较保守或不太信赖他人的主体也许会以运算 $\uparrow P$ 来应对一个软触发，这个运算仅把最好的 P-世界放在顶上而听任其他一切都如同它们在 M 中那样。用一个相匹配的模态词，我们为这个新

的修正运算找到相应的归约公理：

$$[\uparrow P]B(\varphi/\psi)\leftrightarrow(B(\neg[\uparrow P]\psi/P)\wedge B([\uparrow P]\varphi\wedge[\uparrow P]\psi))$$
$$\vee(\neg(B(\neg[\uparrow P]\psi)/P)\wedge B([\Uparrow P]\varphi/(P\wedge[\Uparrow P]\psi)))$$

同样，一个对应论证将表明这个公理决定了信念改变修正运算 $\uparrow P$。

对应理论告诉我们描述（条件）信念改变的原则和描述适当可定义的、合理性模式中的语义改变的原则之间的精确关系。因此，如同关于知识的情形一样，我们得到一个信念及信念改变的几何。

3.7 一阶逻辑的模态基础

为了显示对应分析及反向分析的强大功能，下面举最后一个例子，我们回到所有问题开始的那个核心地带。模态逻辑一开始是作为标准一阶谓词逻辑的一个扩充，或许一个微细结构片断而出现的。但是，大家都知道，那个系统本身就很“模态”！考虑特称量词的塔斯基子句

$\boldsymbol{M}, \alpha\models\exists x\varphi$，当且仅当，对某个 $d\in|\boldsymbol{M}|$：$\boldsymbol{M}, \alpha_d^x\models\varphi$。

这里，变元指派 α 在解构量化陈述时是必要的。但是，不需要这么多就能给出一阶量化的组合语义，即下面的抽象模式

$\boldsymbol{M}, \alpha\models\exists x\varphi$，当且仅当，对某个 β：$R_x\alpha\beta$ 且 $\boldsymbol{M}, \beta\models\varphi$

这里，指派成为抽象状态，而在 α 和 α_d^x 之间成立的那个具体关系 $\alpha=_x\beta$ 则正好成为一个二元关系 R_x。显然，这是一个极小的多模态语言的语义。这个状态语义有一种独立的魅力。一阶赋值是一个改变计算状态的信息过程（van Benthem, 1996B)，而公式则是从事实检验，改变某个变项的值等基本行动复合而成。

于是，一阶逻辑常见的有效公式可以分成两组，这些有效公式可以在像（Enderton, 1972）那样的好教科书中查到。其中一组由极小的模态逻辑组成：①所有经典的布尔命题定律，②模态分配律：$\forall x(\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow(\forall x\varphi\rightarrow\forall x\psi)$，③模态必然概括：若 $\vdash\varphi$ 则 $\vdash\forall x\varphi$，以及④一个将 $\exists x\varphi$ 定为 $\neg\forall x\neg\varphi$ 的定义。许多一阶推论都可以这样得到描述。不过现在，我们也能进一步考察一阶公理，并弄清除此之外这些公理还说了些什么。我们期望它们反映了赋值过程的其他性质。

同样，这一切可以用模态框架对应来阐明。全部的讨论可见（van Benthem, 1997)，我们这里只引用几个精彩片段。首先，指派中间的那个特殊关系 $\alpha=_x\beta$ 具有一些普遍性质。这些关系都是等价关系，这一事实就反映在诸如 $\exists x\exists x\varphi\rightarrow\exists x\varphi$ 一类有效的 S5 型公理中。如通常一样，这个公式对应于传递性。事实上，

做这样的一般假定但对可用指派集的“丰满度（fullness）”不作任何存在性假定的最终系统，把我们引向一个有意思而仍然可判定的一阶逻辑版本，叫作 *CRS*（Nemeti，1985），跟广义的关系代数有关。

但是我们现在要讨论常见的一阶逻辑的不可判定性的根源！模态框架的对应理论帮助我们揭示这些根源。“解构”（Enderton，1972）中其他的一阶公理将使我们迅速地把注意力集中到有效的量词交换律上来。结果证明这些公理（正好依据它们的萨奎斯特形式）对应于赋值过程的大家熟知的重要的存在性几何性质：

事实 11

（1） $\exists y\exists x\varphi\rightarrow\exists x\exists y\varphi$ 表达“通道逆转”：

$$\forall\alpha\beta\gamma(R_x\alpha\beta\ \&\ R_y\beta\gamma\rightarrow\exists\delta(R_y\alpha\delta\ \&\ R_x\delta\gamma)$$

（2） $\exists y\forall x\varphi\rightarrow\forall x\exists y\varphi$ 表达“汇合性”：

$$\forall\alpha\beta\gamma(R_y\alpha\beta\ \&\ R_x\alpha\gamma\rightarrow\exists\delta(R_x\beta\delta\ \&\ R_y\gamma\delta)$$

这样，通过返回到一个较广的语义结构类，我们为谓词逻辑有效公式提供了不同的解释。有些仍然是普遍有效——但另一些则表达由所有可用计算状态所形成的空间的种种特殊性质。而且当那个空间变得足够丰满时，拥有与熟知的、不可判定的铺砖问题相连的格子结构时，我们就得到它的模态理论的不可判定性。

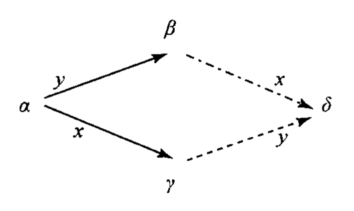


图 4　汇合性的菱形

但是这样一个较大的论域也带来了进一步的回报。例如，在一阶逻辑的抽象状态模型上可以做出比在标准塔斯基模型上能做出的更多的区别。特别是，对于代入算子 [t/x] 现在有独立的所指。我们也能很自然地解释就一阶逻辑的变项序组 x 而言的多元量词 $\exists x$，利用它们存储器中的值的同时改变。这样就真正丰富了一阶的词汇，而仍能保留抽象状态模型上的可判定性（Andreka，et al.，1998）。当然，模态对应也适用于分析这个更为丰富的语言中的原则。

3.8　结　束　语

当我们把一个业已确立的观点翻转过来、回顾我们选定的模型，并且询问哪种语义内容依附于所给定的句法公理时，模态对应分析也就发生了。这种风格的思考有时也许看上去很抽象，但却又有些新奇的兴趣。我们希望本文已经表明我们可以验证给出的公理是否确实刻画了它们本来应该的样子，由此我们可以为熟悉的原则找到令人惊奇的新内容，有时我们还需要构造新语义的个体域和这些域

上的新语言。在《旧约全书》中，罗德的妻子因回头看而被惩罚。[①] 这很不公正——不过在逻辑中，“换个方向”看问题只会使我们受益!

参考文献

Aiello M, van Benthem J. 2003. A Modal Walk through Space. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 12 (3-4): 319~363

Andreka H, van Benthem J, Nemeti I. 1998. Modal Logics and Bound Fragments of Predicate Logic. *Journal of Philosophical Logic*, 27: 217~274

Baltag A, Moss L, Solecki S. 1998. The Logic of Public Announcements, Common Knowledge and Private Suspicions. *Proceedings TARK 1998*, Morgan Kaufmann Publishers, Los Altos. 43~56

Blackburn P, de Rijke M, Venema Y. 2000. *Modal Logic*, Cambridge University Press, Cambridge

Blackburn P, Wolter F, van Benthem J. eds. 2006. *Handbook of Modal Logic*, Elsevier Science Publishers, Amsterdam

Burgess J. 1981. Quick Completeness Proofs for Some Logics of Conditionals. *Notre Dame Journal of Formai Logic*, 22 (1): 76~84

Enderton H. 1972. *A Mathematical Introduction to Logic*, Academic Press, New York

Németi, I. 1985. The Equational Theory of Cylindric Relativized Set Algebras is Decidable. Preprint No 63/85, Mathematical Institute, Hungarian Academy of Sciences, Budapest

Rodenburg P. 1986. *Intuitionistic Correspondence Theory*, Ph. D. Dissertation, Mathematical Institute, University of Amsterdam

Sahlqvist H. 1975. Correspondence and Completeness in the First-and Second-order Semantics for Modal Logic. *In*: Kanger S, ed. *Proceedings of the Third Scandinavian Logic Symposium*. Amsterdam, North-Holland, 110~143

van Benthem J. 1983. *Modal Logic and Classical Logic*. Bibliopolis, Napoli

van Benthem J. 1992. Logic as Programming. *Fundamenta Informaticae*, 17: 285~317

van Benthem J. 1996A. Complexity of Contents versus Complexity of Wrappings. *In*: Marx M, Masuch M, Pólos L. eds. *Arrow Logic and Multimodal Logic*, CSLI Publications, Stanford. 203~219

van Benthem J. 1996B. *Exploring Logical Dynamics*. CSLI Publications, Stanford

van Benthem J. 1997. Modal Foundations for Predicate Logic. *Bulletin of the IGPL* 5 (2): 259~286, London and Saarbruecken

van Benthem J. 1999. Temporal Patterns and Modal Structure. *Logic Journal of the IGPL*, 7 (1): 7~26

van Benthem J. 2005. Minimal Predicates, Fixed-Points, and Definability. *Journal of Symbolic Logic*,

① 据《旧约全书》，因居民罪恶深重，罪恶之地所多玛（Sodom）和俄摩拉城（Gomorrah）被神毁灭。不过罗德和他的家人得到宽恕，上帝命令他们离开，不能回头看。罗德（Lot）的妻子回头看，结果立刻变成了盐柱——译者注。

70 (3): 696 ~ 712

van Benthem J. 2006A. Modal Frame Correspondences and Fixed-Points. *Studia Logica*, 83 (1): 133 ~ 155

van Benthem J. 2006B. One is a Lonely Number: on the logic of communication. *In*: Chatzidakis Z, Koepke P, Pohlers W. eds. *Logic Colloquium*'02, ASL & Peters, A. K. , Wellesley MA, pp. 96 ~ 129

van Benthem J. 2007. Dynamic Logics for Belief Revision. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 17 (2): 129 ~ 155

Veltman F. 1985. *Logics for Conditionals*. Dissertation, Philosophical Institute, University of Amsterdam

附 录



附录一　约翰·范本特姆小传

简介

约翰·范本特姆（http：//staff. science. uva. nl）是阿姆斯特丹大学逻辑学的大学教授，斯坦福大学的亨利·瓦尔德格雷夫·斯图加特（Henry Waldgrave Stuart）哲学教授，研究领域涉及模态逻辑、时态逻辑、科学方法论、自然语言的逻辑语义及句法，目前主要感兴趣于计算、信息流以及交际的动态逻辑。他是“逻辑、语言与计算研究所（Institute for Logic，Language and Computation）”的创始人，该所是数学系、计算机科学系、哲学系和语言系的一个跨学科的研究所，主要工作领域是信息的结构及动态。他也是欧洲逻辑、语言和信息协会（European Foundation of Logic，Language and Information）的名誉会员。他已出版的专著有《时间逻辑》（*The Logic of Time*，1983），《模态逻辑和经典逻辑》（*Modal Logic and Classical Logic*，1985），《逻辑语义学论文集》（*Essays in Logical Semantics*，1986），《行动中的语言》（*Language in Action*，1991）以及《探寻逻辑的动态性》（*Exploring Logical Dynamics*，1996）。他目前主要的出版物都跟智能互动这一课题有关，旨在探寻逻辑、计算机科学和博弈论的交叉。他已发表了约450篇论文，合著了三本教科书，指导了大约60位博士。他是《逻辑和语言手册》（1997）、《模态逻辑手册》（2006）、《空间逻辑手册》（2007）以及《信息哲学手册》（2007）的主编。自1991年以来，他是欧洲科学院院士。自1992年以来，他是荷兰皇家艺术与科学院院士。1996年他获得荷兰科学研究委员会（NWO）颁发的斯宾诺莎奖（奖金100万欧元）。1998年比利时烈日大学（Université de Liège）授予他名誉博士学位。自1995年以来，他是国际名人的一员。自2001年以来，他是国际哲学研究院（2001年）成员。自2002年以来，他是荷兰科学委员会的成员。

从2004年起，范本特姆任中山大学客座教授。2008～2009年，他任清华大学伟伦特聘教授。

研究传略

在20世纪70年代，范本特姆研究模态语言的数学模型论和它们跟一阶逻辑、高阶逻辑的联系，提出了一个系统的、论述框架类的模态对应理论。主要结果包括初等模态公式的刻画、典范可定义模态框架类的刻画以及模态可定义性结果向二阶逻辑的推广。这一研究还引出模型之间的互模拟的概念，特别是，有刻画定理表明模态语言是由对互模拟不变的一阶公式所组成（*Modal Correspondence Theory*，1977；*Modal Logic and Classical Logic*，1983）。这一工作在方法论上的主要特点就在于强调“并行观点”（tandem view），模态观点和经典观点可以同时用于理论与实践。

1980年前后，范本特姆转而研究科学方法论中的逻辑方法，发表论述经验理论模型论结构的著作（The Logical Structure of Science，*Synthese* 51，1982，431～472）。这一倾向下较为专门的研究是他对时间和时序推理的点、段本体论的系统论述，模态方法和标准逻辑方法并重（*The Logic of Time*，1983）。近来，他在空间和几何学的逻辑中又重新考虑了这一论述［参看M. Aiello & J. van Benthem. A Modal Walk Through Space. *Journal of Applied Non-Classical Logics*，2003，12（3/4），2003：319～363］。

在20世纪80年代，范本特姆投入自然语言语义的逻辑研究，特别强调广义量词。他的著作《逻辑语义学论文集》（*Essays in Logical Semantics*，1986）是关于自然语言量词表达式的表达力的一个广泛的理论，包括依据单调性和自动机复杂性对这一语汇所做的第一个系统的分类结果。除此之外，还有关于直接在语言表层形式上进行现实推理的第一个“自然逻辑”演算，将类型论推导跟单调性标记结合起来。推广由此开始，他紧接着的研究计划是研究自然语言的范畴语法，把它当做一个弱的子结构基础上的证明论来看（*Language in Action*，1991）。这一工作的亮点是利用“线性兰姆达项”所做的关于自然语言意义复合的语义，关于在有穷类型谱系中满足语义限制条件的语言条款的表达力的研究，以及（一般地）证明论和语法问题之间的系统联系。

20世纪90年代，范本特姆返回到模态逻辑，但重点是在关于计算的逻辑上。这个时期的一个结果是，将命令程序上的正则一阶运算正确地刻画为那些在一种自然的意义下对互模拟“安全”（safe）的运算。另一个结果是，将模态方法推广到计算机科学中进程等价和一阶可定义性的更为一般的模型论上［J. van Benthem & J. Bergstra. Logic of Transition Systems. *Journal of Logic*，*Language and Information*，1995，3（4）：247～283］。此外，还利用有关的模态技术来寻找不可判定的经典系统的可判定“核心版本”（core versions），以“箭头逻辑”（arrow logic）（关系代数的一种表达可判定说法）为主要实例。这一工作的另一结果得

到一阶逻辑的可判定的模态版本。最后，与来自代数逻辑的观念相融合，发现了一阶逻辑的一个新的更大的可判定部分，被称作“安保片段”（guarded fragment）[H. Andréka, J. van Benthem & I. Németi. Modal Logics and Bounded Fragments of Predicate Logic. *Journal of Philosophical Logic*, 1998, 27 (3): 217 ~274]。这一阶段的大部分工作都收集在专著《探寻逻辑的动态性》(*Exploring Logical Dynamics*, 1996) 中。最近在模态逻辑方面的数学工作包括将模态模型论扩展到无穷语言和不动点语言上 [J. Barwise & J. van Benthem. Interpolation, Preservation, and Pebble Games, *Journal of Symbolic Logic*, 1999, 64 (2): 881 ~903 和 J. van Benthem. Minimal Predicates, Fixed-Points, and Definability. *Journal of Symbolic Logic*, 2005, 70 (3): 696 ~ 712]。

范本特姆的较为普遍的研究兴趣是“动态转向”(dynamic turn)，把交流行为（说、问、答）、信息更新以及信念修正变成逻辑理论的一等公民。结果，所有这些东西都看做多主体互动过程，特别是，可以看成为博弈。到 2000 年，探讨逻辑和博弈论之间的联系成为一个主要的兴趣所在，其宗旨在于发展适合二者的一个共同的框架模型。斯宾诺莎奖金项目 (Spinoza Award project) “Logic in Action” (1996 ~2001) 就是这个方向研究的一个典型样本（参看 *Logic in Action*, ILLC, Amsterdam, 2002)。还在发展中的一组讲义笔记 *Logic in Games* 是这一框架的一个初次解说，以动态认知逻辑和诸如不动点逻辑一类的相关系统为基础，同时引入一些用于博弈论思考的典型结构，例如偏好、游戏者的能力以及策略平衡概念。这一工作导致逻辑和博弈论之间的新交叉 [J. van Benthem. Games in Dynamic Epistemic Logic. *Bulletin of Economic Research*, 2001. 53 (4): 219 ~248]。最终，这一研究的雄心壮志不只是对现存社会行为作逻辑分析，而且还想设计比较自然的新型博弈和社会程序。

这一方向的研究结果体现为即将出版的几部专著：《信息和互动的逻辑动态性》(*Logical Dynamics of Information and Interaction*) 即将在剑桥大学出版社出版，《博弈中的逻辑》(*Logic in Games*) 即将在施普林格出版社出版。还有，一本辅助性的教材《思想开放者的模态逻辑》(*Modal Logic for Open Minds*) 已于 2009 年在斯坦福语言和信息研究中心出版社出版。

范本特姆在阿姆斯特丹大学的职位是贝特 (Evert Willem Beth) 的席位，这个席位开设于 1950 年。贝特认为逻辑是介于哲学、数学、计算机科学、语言学、社会科学和心理学之间的学科的观点多年来一直在逻辑、语言与计算研究所活跃并发展着。范本特姆在斯坦福大学的职位同样是处于多学科的交叉，依托由巴威斯 (Jon Barwise)、佩里 (John Perry) 以及其他人等在 20 世纪 80 年代开创的语言信息研究中心。这一学科交叉的最新发展是大家对逻辑和认知科学之间的联系

的浓厚兴趣。

见解陈述

逻辑正在成为对信息、计算和智能互动作一般研究的学科，这远远超出了认为逻辑是研究“有效推论”的传统狭隘的观点。逻辑正在利用多方面的资源，从先验的数学到认知科学。我们需要从证明和计算到所谓的主体性（agency）的研究议程的扩张，这不仅仅是为了证明我们前后一致，而且也是为我们今天的存在做辩护。我希望这将为我们带来新的洞见，与至今仍令人敬畏的20世纪30年代的思想高峰相媲美。由此看来，逻辑是有益于整个学术界的一门核心学科。我的志向是要使逻辑甚至成为中学基础文化教育的一部分，并为一般民众所用。

论著选目

一、专著：

1983: *The Logic of Time.* Reidel, Dordrecht, (Synthese Library 156). Revised and expanded edition published in 1991.

1983: *Modal Logic and Classical Logic.* Bibliopolis, Napoli (Indices 3) & Humanities Press, Atlantic Heights.

1986: *Essays in Logical Semantics.* Reidel, Dordrecht, Studies in Linguistics and Philosophy 29.

1991: *Language in Action: Categories, Lambdas and Dynamic Logic.* North - Holland, Amsterdam, (Studies in Logic 130). Paperback reprint with new Appendix, The MIT Press, 1995.

1996: *Exploring Logical Dynamics, Studies in Logic, Language and Information.* CSLI Publications & Cambridge University Press.

二、论文：截至2009年，大约450篇。

三、教科书：

1991: *Logic, Language and Meaning.* The University of Chicago Press. Expansion and revision of GAMUT 1982.

1988: *A Manual of Intensional Logic.* CSLI Publications, Stanford. & The University of Chicago Press, Chicago.

2003: *Logica voor Informatica.* Revised and expanded edition of LVI 1991. With Hans van Ditmarsch and Josje Lodder.

2005: *Hoe Wiskunde Werkt* (How Mathematics Works). Book perversion, Institute for Interdisciplinary Studies Amsterdam, with Jan Jaspars and Robbert Dijkgraaf.

附录二　英汉/汉英专业术语、人名对照表

(I) 英汉对照

φ holds/is true at w in **F**　φ 在 **F** 中的 w 处成立/为真
λ-abstraction　λ-抽象
Σ-consistent　Σ-协调的
1-saturatedness　1-饱和性
2-saturatedness　2-饱和性

A

a ramified theory of types　分枝类型论
Åberg, C.　阿伯格
algebraization　代数化
alternative relation　择代关系
anti-symmetry　反对称
arithmetical hierarchy　算术谱系
Arrow Logic　箭头逻辑
Axiom of Constructibility　可构造公理
Axiom of Reducibility　可归约公理
axiomatized by Σ　由Σ公理化的

B

backward-looking　回顾
Barcan formula　巴坎公式
Barwise, J.　巴威思
Barwise-Moschovakis Theorem　巴威斯－莫斯克瓦基斯定理
basic type　基本类型
Beth-tableaus　贝特表列
Betweenness　介于
Birkhoff, G.　柏克霍夫
bisimulation 互模拟
Blok, W. J.　布洛克
Bull, R. A.　布珥
Bull's Theorem　布珥定理

C

canonical　典范的
canonical modal formula　典范模态公式

change the plausibility pattern 改变合理性型式
Church, A. 丘奇
closed formula 闭公式
closed under disjoint union 对不相交并封闭
cofinal 共尾的
cofinite 余有穷的
Compactness Theorem 紧致性定理
complete 完全的
complete closure 完全闭包
Completeness Theory 完全性理论
Comprehension Principle 内涵原则
conditional belief 条件信念
confluence 汇合性
connected 连通的
connectedness 连通性
conservation result 守恒结果
conservative 保守的
Craig, W. 克雷格
Cresswell, J. 克雷斯韦尔
cut 切割
cylindric algebras 柱代数

D

D'Agostino, G. 达戈斯蒂诺
de Jongh, D. H. J. 德漾
de Jongh-Sambin fixed point theorem 德漾－桑宾不动点定理
deconstructing 解构
Dedekind Axiom 戴德金公理
Dedekind Continuity 戴德金连续性
Dedekind, J. W. R. 戴德金
deductive support 演绎支持
defaut reasoning 缺省推理
definability theory 可定义性理论
degree 度
deontic logic 道义逻辑
derivability 可推导性
derivability in *K* *K* 内的可推导性
descriptive 描述性的
direct product 直积
disjoint union 不相交并
disjunction-free formula 无析取公式
Doets, H. C. 杜茨
d-persistence *d*-持久性
Dummett formula 达米特公式
Dummett's Axiom 达米特公理
dynamic epistemic logic 动态认知逻辑

E

evaluation 赋值
earlier than 早于
Eggermont, A. 埃杰蒙特
elementary 初等的
elementary chain 初等链
elementary submodel 初等子模型
end-extension 端扩张
equational variety 等式簇
existence 存在
existentially restricted *L*-formulas 特称受限的 *L*-公式
existents 存在物

F

G

H

I

identification 同化
identity 恒等
in the given world 在给定世界中
incomplete 不完全的
individual concept 个体概念
inflationary fix-point 膨胀不动点
intensional logic 内涵逻辑
interchange laws 交换律
intermediate logic 中间逻辑
Interpolation Theorem 插值定理
invariance 不变性
invariance for partial isomorphism 对部分同构不变
invariant for disjoint union 对不相交并不变
invariant for generated subframe 对生成子框架不变
invariant for generated submodel 对生成子模型不变
invariant for p-relation 对 p-关系不变
irreflexivity 禁自返性
Isomorphism Lemma 同构引理

J

Jacobi 雅可比
Jech, T. 耶克

K

Kanger, S. 坎格尔
Keisler, H. J. 凯斯乐
Keisler-Putnam formula 凯斯乐 – 普特南公式
Konig's Lemma 柯尼希引理
Krabbe, E. C. W. 克拉贝
Kripke, S. A. 克里普克

L

L_0-elementary L_0-初等的
L_0-Δ-elementary L_0-Δ-初等的
L_0-$\sum$-elementary L_0-$\sum$-初等的
L_0-$\sum\Delta$-elementary L_0-$\sum\Delta$-初等的
Lachlan, A. H. 拉克兰
Le Bars, J-M. 勒巴斯
Lemmon filtration 莱蒙过滤
Lemmon, E. J. 莱蒙
Lewis, C. I. 刘易斯
lexicographic upgrade 词典升级
liminfs 限定下确界
limsups 限定上确界
Lindenbaum, A. 林登鲍姆
Lindström, P. 林斯特龙
link-cutting 链接切割
Löb Axiom 洛伯公理
Löb formula 洛伯公式
Löb, M. H. 洛伯
local 局部的
local consequence 局部后承
local equivalence 局部等价
locality 局部性
Łoś, J. Z. 沃斯
Lowenheim-Skölem Theorem 骆文汉姆 –

potential isomorphism 潜同构
predicate circumscription 谓词限制
predicate substructure 谓词子结构
pre-encode 预编码
pre-fixed points 前不动点
p-relation *p*-关系
prenex normal form 前束范式
preservation class 保持类
preserved under disjoint union 对不相交并保持
preserved under generated subframe 对生成子框架保持
preserved under *p*-morphic image 对 *p*-态射像保持
preserved under *p*-morphism 对 *p*-态射保持
process model 进程模型
product update 乘积更新
projection 投射
proof-generated 为证明而给出的
propositional quantifier 命题量词
public announcement 公开宣告

R

Rabin, M. O. 拉宾
Rahman, S. 夏希德・拉赫曼
re-decribing modalities 再描述模态词
reduced products 缩积
reduction class 归约类
reflexivity 自返性
relation of accessibility 可达关系
relative plausibility 相对合理性
restricted formula 受限公式
restricted L_0-formula 受限的 L_0-公式
restricted positive formula 受限正公式
Rodenberg, P. H. 罗登伯格

S

Sahlqvist Theorem 萨奎斯特定理
Sahlqvist, H. 萨奎斯特
Sambin, I. 撒宾
saturated 饱和的
saturated structure 饱和结构
scattering 散射
Scott formula 斯科特公式
Scott, D. 斯科特
Segerberg, K. 塞格伯格
semantics consequence 语义后承
Siena school 锡耶纳学派
skeleton 构架
Skolem reduction 斯科伦归约
smallest filtration 最小过滤
Smorynski, C. 斯莫林斯基
soft triggers 软触发
Solovay, R. 索洛维
sort 种类
Stone representation 斯通表示
Stone Representation Theorem 斯通表示定理
strict implication 严格蕴涵
strongly isotone function 强保序映射
structure 结构
subalgebra 子代数
subdirectly irreducible algebras 次直积不可约代数
subframe 子框架

Z

Zemerlo-Frankel set theory ZF　策梅罗－弗兰克尔集论 ZF

（II）汉英对照

λ-抽象 λ-abstraction
Σ的亨金框架，HF（Σ）Henkin frame of Σ
Σ的亨金模型，HM（Σ）Henkin model of Σ
Σ-协调的 Σ-consistent
φ 在 **F** 中的 w 处成立/为真 φholds/is true at w in **F**
1-饱和性 1-saturatedness
2-饱和性 2-saturatedness
d-持久性 d-persistence
K 内的可推导性 derivability in K
L_0-ΣΔ-初等的 L_0-Σ Δ-elementary
L_0-Δ-初等的 L_0-Δ-elementary
L_0-Σ-初等的 L_0-Σ-elementary
L_0-初等的 L_0-elementary
m-公式 m-formula
M-公式 M-formula
n-公式 n-formula
p-关系 p-relation
p-态射 p-morphism
U-语句 U-sentence
w 的 n-外壳 the n-hull around w

A

阿伯格 Åberg. C.
埃杰蒙特 Eggermont, A.
奥雷 Orey, S.
奥托 Otto, M.

B

巴坎公式 Barcan formula
巴威思 Barwise, J.
巴威斯－莫斯克瓦基斯定理 Barwise-Moschovakis Theorem
柏克霍夫 Birkhoff, G.
饱和的 saturated
饱和结构 saturated structure
保持类 preservation class
保守的 conservative
贝特表列 Beth-tableaus
必然概括 Necessitation
闭公式 closed formula
变项 variable
波斯特 Post, E.
不变性 invariance
不动点 fixed point
不动点算子 fixed point operators
不完全的 incomplete
不相交并 disjoint union
布珥 Bull, R. A.
布珥定理 Bull’ s Theorem
布洛克 Blok, W. J.

C

策梅罗－弗兰克尔集论 ZF Zemerlo-Frankel set theory ZF
插值定理 Interpolation Theorem

D

F

G

H

J

介于 Betweenness
紧密性 tightness
紧致性定理 Compactness Theorem
进程模型 process model
禁自返性 irreflexivity
局部的 local
局部等价 local equivalence
局部后承 local consequence
局部性 locality

K

凯斯乐 Keisler, H. J.
凯斯乐-普特南公式 Keisler-Putnam formula
坎格尔 Kanger, S.
柯尼希引理 Konig' s Lemma
可达关系 relation of accessibility
可代入性 substitutability
可定义性理论 definability theory
可构造公理 Axiom of Constructibility
可归约公理 Axiom of Reducibility
可能世界语义 possible world semantics
可推导性 derivability
克拉贝 Krabbe, E. C. W.
克雷格 Craig, W.
克雷斯韦尔 Cresswell, J.
克里普克 Kripke, S. A.
肯定前件式 Modus Ponens
框架 frame

L

拉宾 Rabin, M. O.
拉赫曼 Rahman, S.
拉克兰 Lachlan, A. H.
莱蒙 Lemmon, E. J.
莱蒙过滤 Lemmon filtration
勒巴斯 Le Bars, J-M.
类型 type
类型 a 的项 term of type a
连通的 connected
连通性 connectedness
链接切割 link-cutting
良定义的 well-defined
良序 well-ordered
邻域模型 neighbourhood models
林登 Lyndon, R. C.
林登鲍姆 Lindenbaum, A.
林斯特龙 Lindström, P.
刘易斯 Lewis, C. I.
罗登伯格 Rodenberg, P. H.
洛伯 Löb, M. H.
洛伯公理 Löb Axiom
洛伯公式 Löb formula
骆文汉姆-斯科伦定理 Lowenheim-Skölem Theorem

M

麦金森 Makinson, D. C.
麦肯西公理 McKinsey axiom
满超积 full ultraproduct
蒙克 Monk, J. D.
蒙塔古 Montague, R.
描述性的 descriptive
命题量词 propositional quantifier
模态代数 modal algebra

模态等值 modal equivalence
模态度 modal degree
模态公式 modal formula
模态归约原理 modal reduction principle
模态可定义的 modal definable
模态逻辑 modal logic
模态命题逻辑 modal propositional logic
模态坍塌 modal collapse
模型 model
摩蒂默 Mortimer, H.

N

内涵逻辑 intensional logic
内涵原则 Comprehension Principle

P

帕施公理 Pasch Axiom
佩扎诺夫斯基 Perzanowski, J.
膨胀不动点 inflationary fix-point
皮亚诺算术 Peano Arithmetic
铺砖问题 Tiling Problem
普遍有效的 universally valid
普遍有效性 universal validity
普勒杰 Pledger, K.
谱系 hierarchy

Q

前不动点 pre-fixed point
前束范式 prenex normal form
潜同构 potential isomorphism
强保序映射 strongly isotone function
切割 cut
丘奇 Church, A.
全称霍恩公式 universal Horn formula
全称例示 Universal Instantiation
全称受限正 L-公式 universally restricted positive L-formula
全关系 universal relation
全局的 global
全局等值 global equivalence
全局后承 global consequence
缺省推理 defaut reasoning

R

软触发 soft triggers
弱汇合性 weak confluence property

S

撒宾 Sambin, I.
萨奎斯特 Sahlqvist, H.
萨奎斯特定理 Sahlqvist Theorem
塞格伯格 Segerberg, K.
散射 scattering
生成的 generated
生成定理 generation theorem
生成子框架 generated subframe
生成子模型 generated submodel
时态逻辑 tense logic
实质蕴涵 material implication
守恒结果 conservation result
受限的 L_0-公式 restricted L_0-formula
受限公式 restricted formula
受限正公式 restricted positive formula

T

W

X

Y

一元的 monadic
遗传性 heredity
义务 obligatory
由 Σ 公理化的 axiomatized by Σ
有穷模型性 finite model property
有穷性引理 Finiteness Lemma
余有穷的 cofinite
语义后承 semantics consequence
预编码 pre-encode
允许全称限制的正 L-公式 positive L-formula allowing universal restriction

Z

再描述模态词 re-decribing modalities
在给定世界中 in the given world
在 f 下 α 在 $\mathbf{M}$ 中的值 value of α in $\mathbf{M}$ under f
早于 earlier than
择代关系 alternative relation
正的 positive
正负性 polarity
正规的 normal
直积 direct product
置换 permutation
中间逻辑 intermediate logic
种类 sort
柱代数 cylindric algebras
转移引理 transfer lemma
子代数 subalgebra
子框架 subframe
子类型 subtype
子模型 submodel
自返性 reflexivity
最大过滤 greatest filtration
最简句法定义 syntactically simplest definition
最小过滤 smallest filtration

致　谢

下面是本书所收录的著作和论文的详细出版信息，相关的出版社已经授权我们其中文翻译出版权，在此表示衷心的感谢！

1. *Modal Logic and Classical Logic*, Bibliopolis, Napoli, 1985

2. Minimal Predicates, Fixed-Points, and Definability. *Journal of Symbolic Logic*, 70 (3), 2005: 696 ~ 712

3. Modal Frame Correspondences and Fixed-Points. *Studia Logica* 83, 2006. Berman J, Dziobiak W, Pigozzi D, Raftery J. eds. *Special issue of Studia Logica in memory of Willem Johannes Blok*: 1 ~ 24

4. Manmuss Immer Umkehren! Dégremont C, Keiff L, Rückert H, eds. *Dialogues, Logics and other Strange Things. Essays in honour of Shahid Rahman*, College Publications, London, 2008